



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



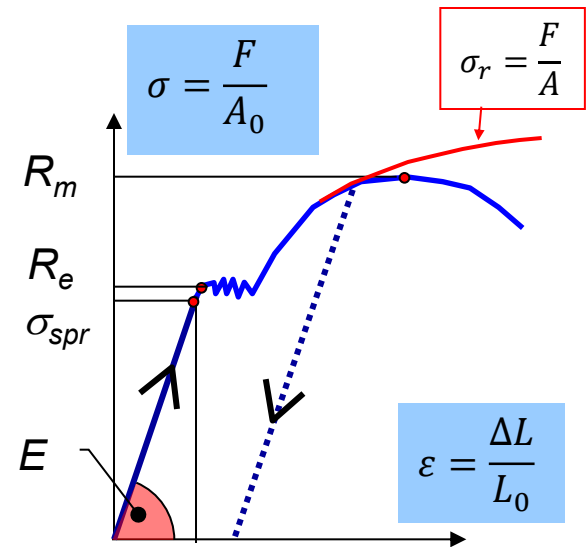
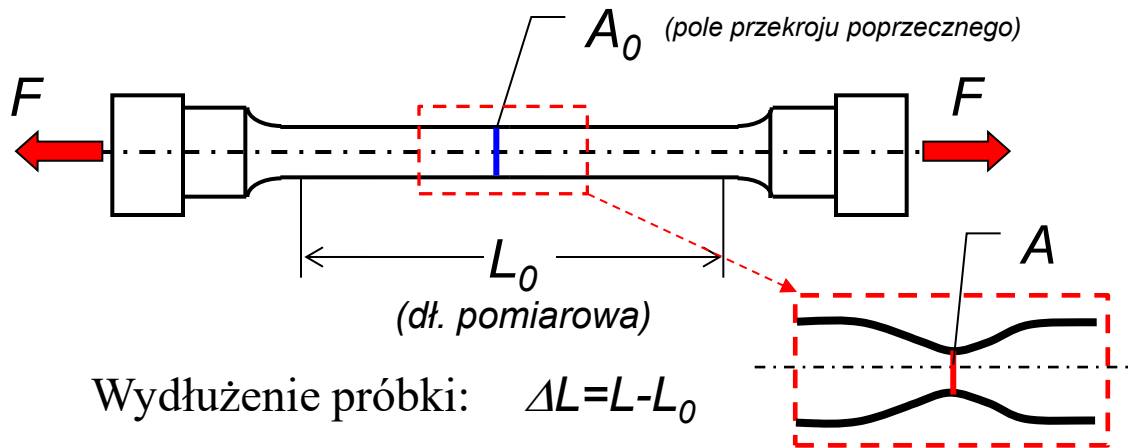
# Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 7. Nieliniowości materiałowe i kontaktu

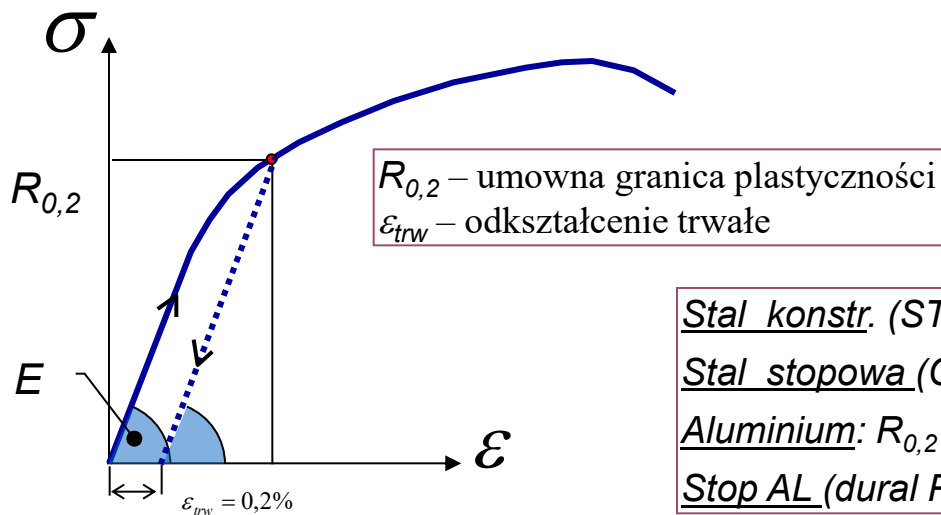
04.2026L

# Statyczna próba rozciągania

Próba rozciągania próbki wykonanej z materiału o wyraźnej granicy plastyczności:



Dla materiału bez wyraźnej granicy plastyczności:



$E$  – moduł Younga  
 $\sigma_{spr}$  – granica sprężystości  
 $R_e$  – granica plastyczności  
 $R_m$  – granica wytrzymałości doraźnej

$\sigma_r$  – naprężenia rzeczywiste  
 $A$  – rzeczywiste pole przekroju poprzecznego

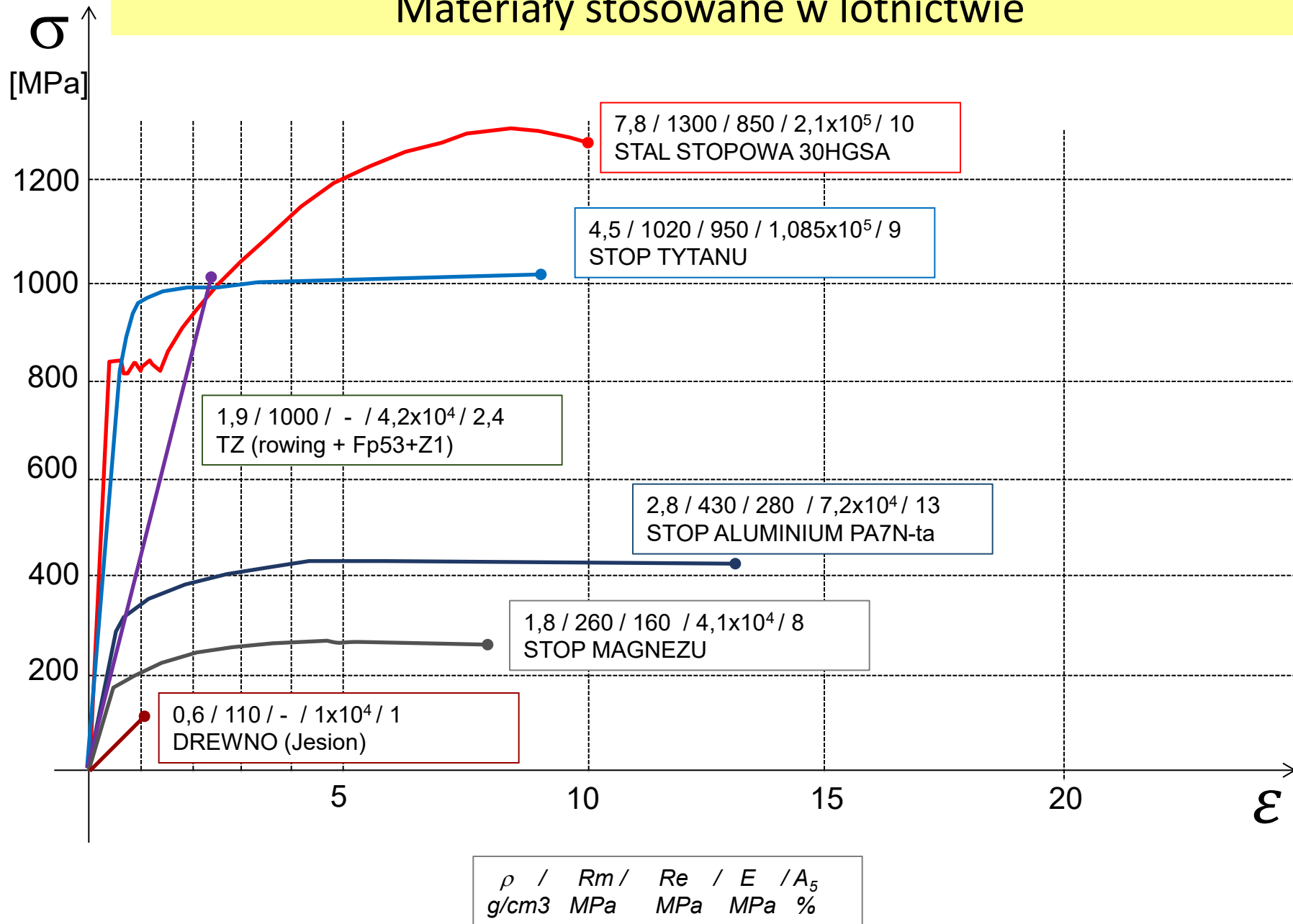
Stal konstr. (ST3S) :  $R_e = 200$  MPa  $R_m = 450$  MPa

Stal stopowa (Cr-Ni-Mo):  $R_e = 870$  MPa  $R_m = 1020$  MPa

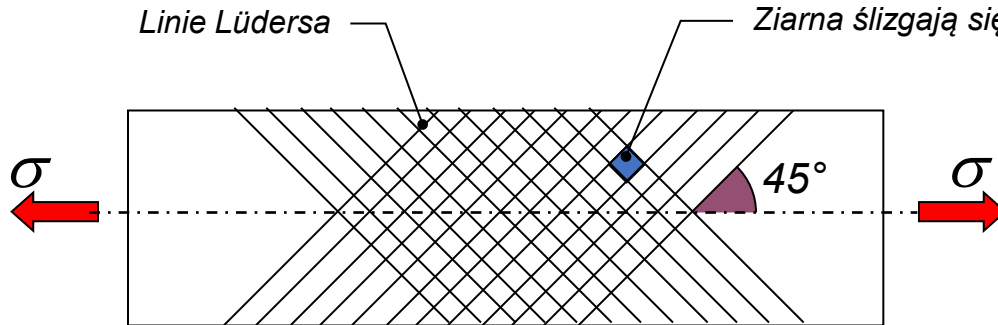
Aluminium:  $R_{0,2} = 120$  MPa  $R_m = 140$  MPa

Stop AL (dural PA9):  $R_{0,2} = 490$   $R_m = 570$  MPa

# Materiały stosowane w lotnictwie

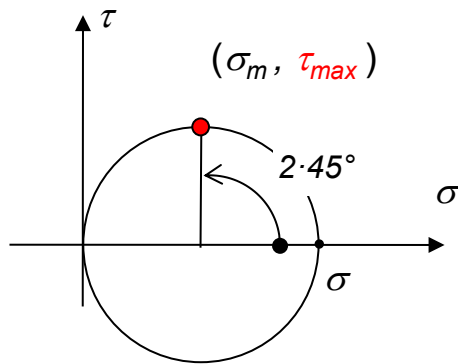


# Hipoteza Coulomba - Treski



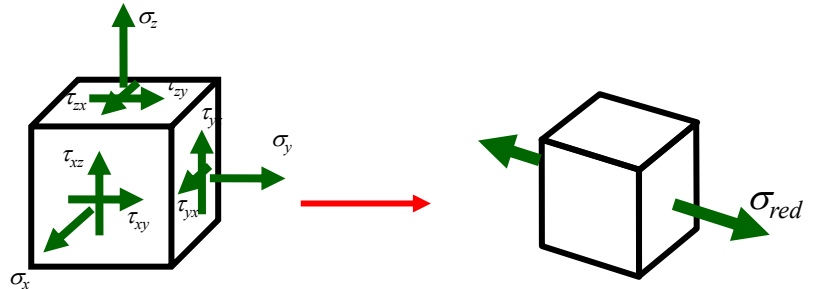
Próbka z miękkiej stali o wyraźnej granicy plastyczności

- ZJAWISKA:**
- Chaotyczne ustawienie ziaren
  - Granice ziaren blokują proces poślizgu
  - Poślizgi – odkształcenia niejednorodne
  - Kolejne ziarna ulegają uplastycznieniu (poddają się poślizgom)



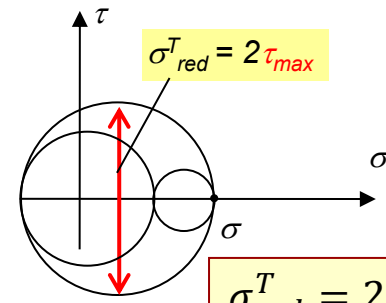
Całe odkształcenie powstaje na skutek poślizgu !

Hipoteza  $\tau_{max}$  (Coulomba-Treski):  
 Wartość  $\tau_{max}$  stanowi miarę niebezpieczeństwa jaką przedstawia dany stan naprężenia z uwagi na pojawienie się pierwszych makroskopowych trwałych odkształceń

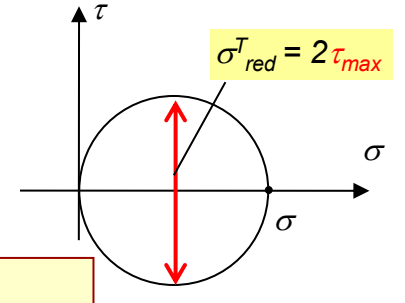


Dowolny stan naprężenia

Równoważny stan rozciągania

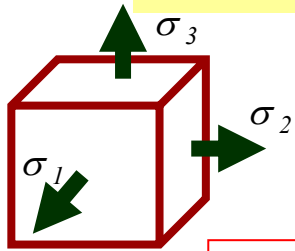


$$\sigma_{red}^T = 2 \cdot \tau_{max}$$



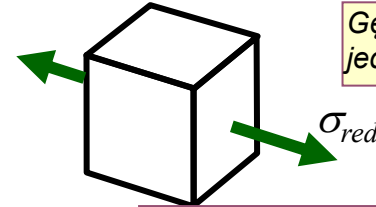
Naprężenia zredukowane, to zastępczy stan jednowymiarowy rozciągania, który pod względem bezpieczeństwa odpowiada stanowi analizowanemu

# Hipoteza Hubera-Misesa- Hencky



Gęstość energii odkształcenia postaciowego dla stanu trójwymiarowego (energia właściwa)

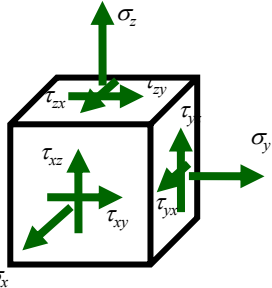
$$U' = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \right\}$$



Gęstość energii dla stanu jednowymiarowego rozciągania

$$U' = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{red})^2 + (\sigma_{red})^2 \right] \right\} = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \sigma_{red}^2$$

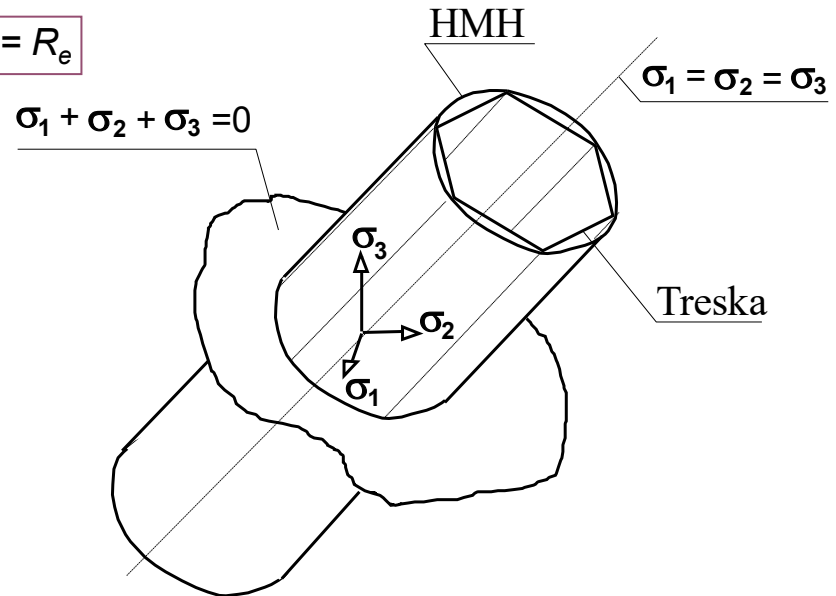
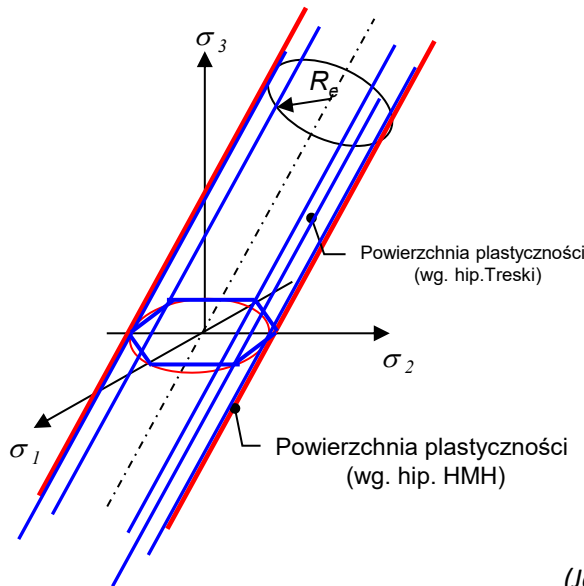
Uplastycznienie nastąpi, gdy gęstość energii odkształcenia postaciowego (na jednostkę objętości) jest równa lub przekroczy gęstość energii, dla której ten sam materiał uplastycznia się w prostej próbie rozciągania.



$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$$

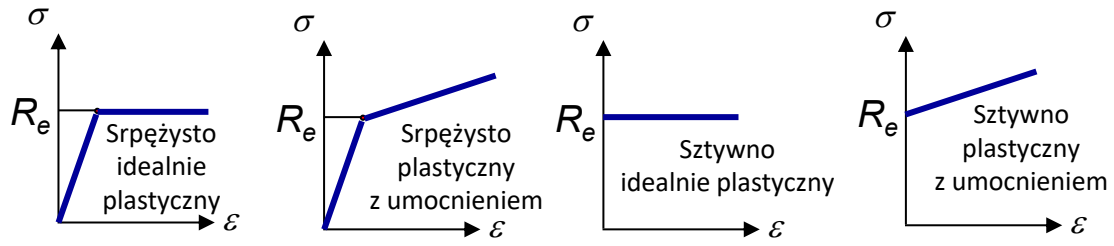
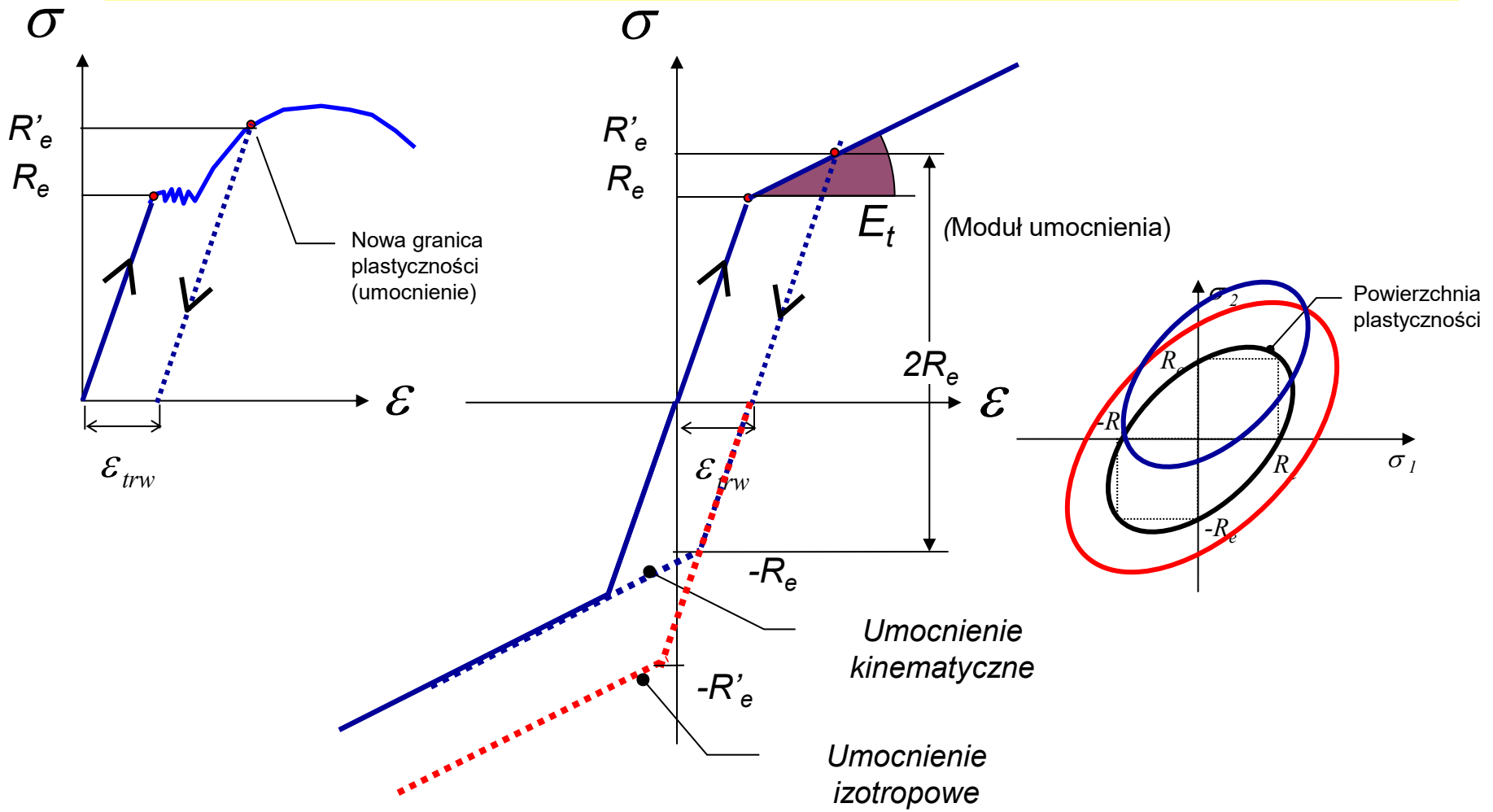
$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Materiał osiągnie pierwsze uplastycznienie gdy  $\sigma_{red} = R_e$



Powierzchnie plastyczności w przestrzeni naprężeń głównych  
(Jest to powierzchnia ograniczająca pole naprężeń w trakcie procesu obciążania)

# Umocnienie materiału



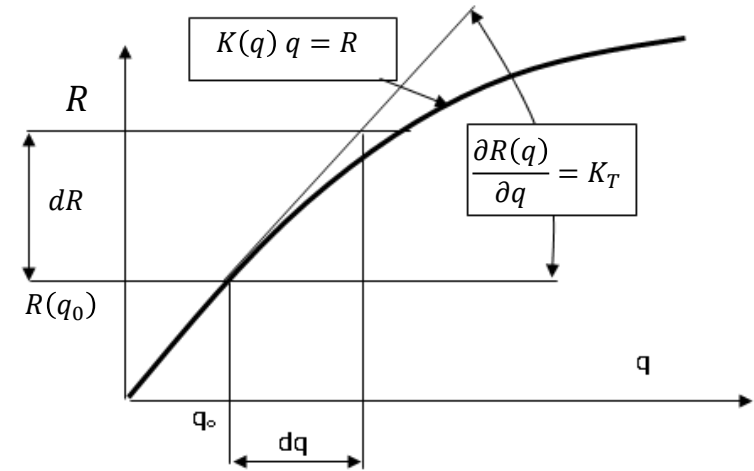
# PRACA KONSTRUKCJI W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

Zależność pomiędzy wektorem przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{q}$  a wektorem obciążenia  $\mathbf{R}$  w MES można w ogólnym przypadku przedstawić w postaci:

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{R} \quad (1)$$

współczynniki macierzy zależą od deformacji wywołującej stany plastyczne w konstrukcji

Zależność tą dla umownego jednego parametru  $q$  można przedstawić w postaci wykresu



Linearyzując układ równań wokół dowolnego położenia równowagi  $\mathbf{q}_0$  otrzymamy równanie przyrostowe:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_0) + \mathbf{K}_T d\mathbf{q} \quad (2)$$

styczna macierz sztywności:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_0 dV$$

$\mathbf{B}_0$  opisuje związek pomiędzy składowymi stanu odkształcenia  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a wektorem parametrów węzłowych  $\mathbf{q}$  ( $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_0 \mathbf{q}$ )

Macierz  $\mathbf{D}^*$  określamy z zależności  $\mathbf{D}^* = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$

Zakładając warunek plastyczności w postaci:

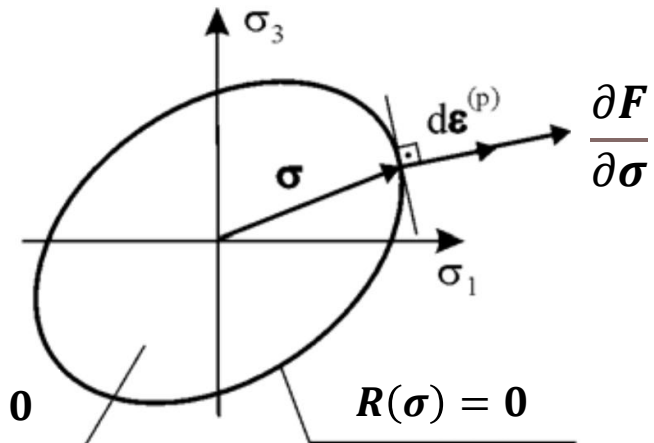
$$F = \sigma_{red} - R_e(\kappa) = 0$$

napr. zred.      granica plastyczności.

stowarzyszone prawo płynięcia:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

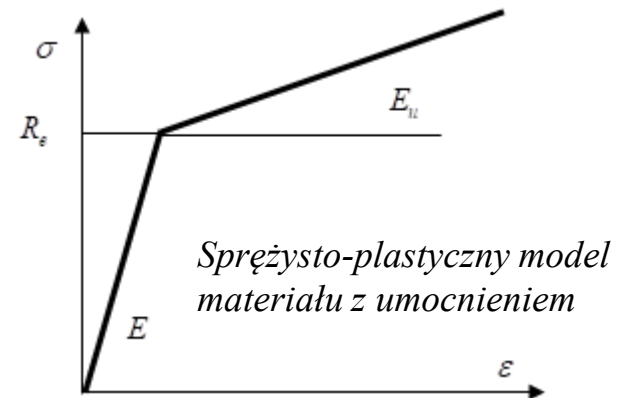
przyrost odkształceń plastycznych      stała proporcjonalności



$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^T} \mathbf{D} \left( E_u + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^T} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1}$$

$\mathbf{D}$  jest macierzą stałych sprężystych

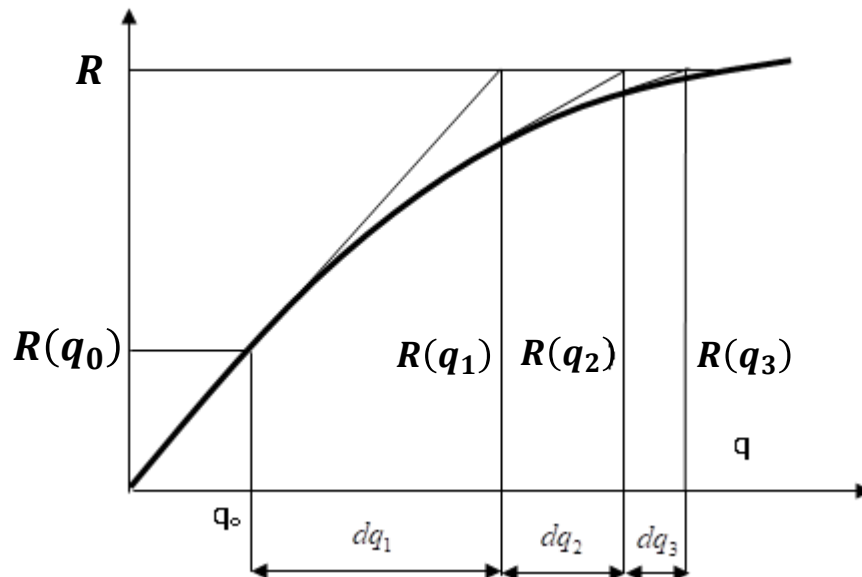
$E_u$  moduł umocnienia po przekroczeniu granicy plastyczności



Nieliniowy układ równań (1),(2) rozwiązuje się zwykle za pomocą technik iteracyjnych.

Jedną z częściej używanych metod iteracyjnych jest metoda Newtona-Raphsona:

$$dq_{i+1} = [K_T^{-1}]_i (R^0 - R(q_i)), \quad q_i = q_0 + \sum_{i=1}^m dq_i$$



# Przykład wprowadzenia właściwości plastycznych w programie ANSYS (Multiliniowa charakterystyka z umocnieniem kinematycznym)

The screenshot illustrates the ANSYS Mechanical Enterprise interface for defining a multilinear kinematic hardening material model. The main window shows a stress-strain graph with two curves, one for T1 = 20.000 and one for T2 = 100.00. The graph plots Stress (SIG) on the y-axis (0 to 800) against Strain (EPS) on the x-axis (0 to 0.32). The curves show an initial elastic region followed by a plastic region with kinematic hardening.

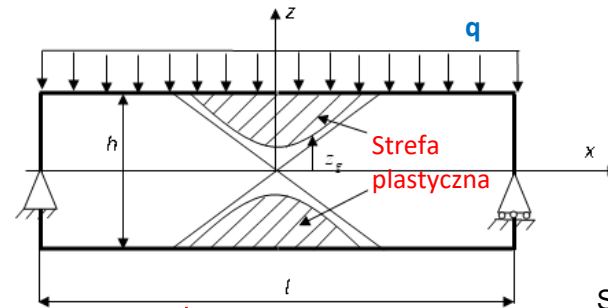
The 'Define Material Model Behavior' window is open, showing the 'Material Models Defined' list with 'Material Model Number 1' selected. The 'Material Models Available' list shows the 'Rate Independent' model selected under 'Plasticity'.

The 'Multilinear Kinematic Hardening for Material Number 1' dialog box is open, showing the 'Stress-Strain Options' set to 'Stress versus Total Strain'. The dialog displays a table of stress-strain data points for two temperatures: T1 = 20 and T2 = 100.

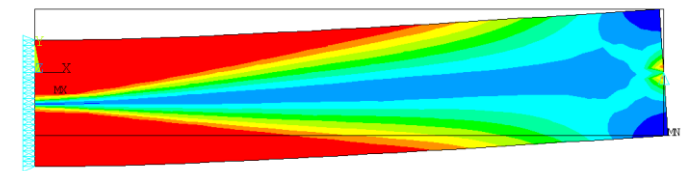
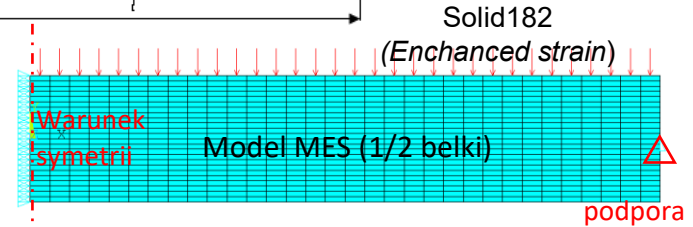
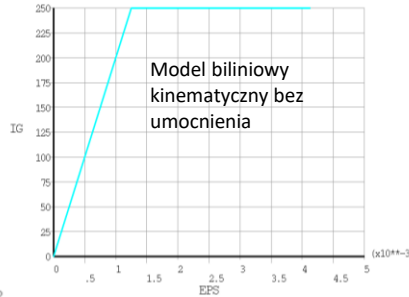
|    | T1         |        | T2          |        |
|----|------------|--------|-------------|--------|
|    | 20         |        | 100         |        |
|    | STRAIN     | STRESS | STRAIN      | STRESS |
| 1  | 0.00099043 | 207    | 3.21906E-03 | 170    |
| 2  | 0.0077057  | 240    | 2.33248E-02 | 240    |
| 3  | 0.010034   | 250    | 3.03222E-02 | 250    |
| 4  | 0.013173   | 260    | 3.79151E-02 | 260    |
| 5  | 0.017307   | 270    | 4.55189E-02 | 270    |
| 6  | 0.022533   | 280    | 5.27187E-02 | 280    |
| 7  | 0.028771   | 290    | 5.93659E-02 | 290    |
| 8  | 0.035731   | 300    | 6.55114E-02 | 300    |
| 9  | 0.069256   | 350    | 0.093323    | 350    |
| 10 | 0.096611   | 400    | 0.12276     | 400    |
| 11 | 0.12546    | 450    | 0.15604     | 450    |
| 12 | 0.15812    | 500    | 0.19341     | 500    |
| 13 | 0.19494    | 550    | 0.2349      | 550    |
| 14 | 0.23603    | 600    | 0.28053     | 600    |
| 15 | 0.28148    | 650    | 0.33033     | 650    |

# Przykład 1 Belka zginana, naprężenia resztkowe

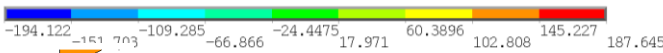
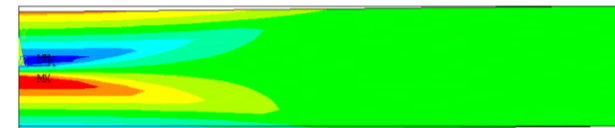
Przeprowadzić analizę nośności granicznej belki o przekroju prostokątnym o grubości  $b = 1$  mm, wysokości  $h = 20$  mm i długości  $l = 200$  mm. Belka jest przegubowo podparta na obu końcach, wykonana z materiału idealnie sprężysto-plastycznego ( $R_e = 250$  MPa), poddana działaniu obciążenia ciągłego  $q$ .



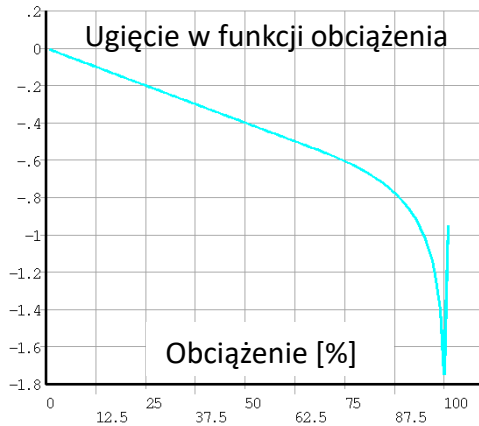
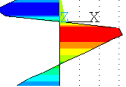
Zredukowane odkształcenia plastyczne (100% obciążenia)



naprężenia zredukowane (100% obciążenia)

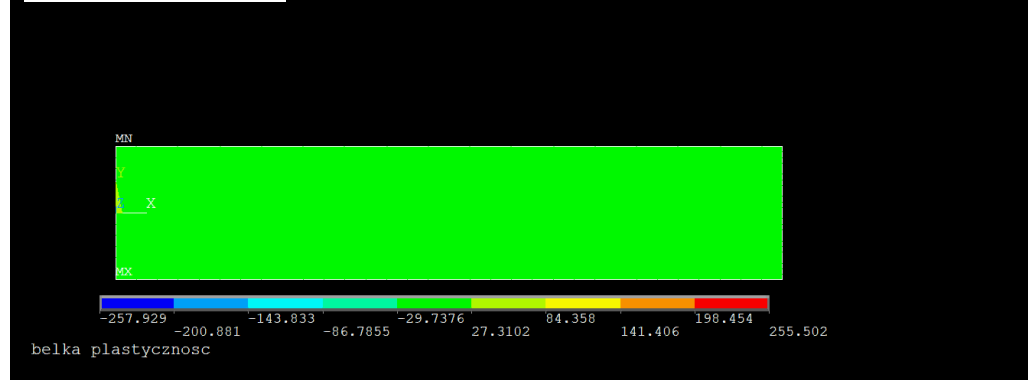


Naprężenia resztkowe po odciążeniu



```
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
RSYS=U
DMX =-.00801
SMN =-3.75806
SMX =3.75805
```

Naprężenia SX

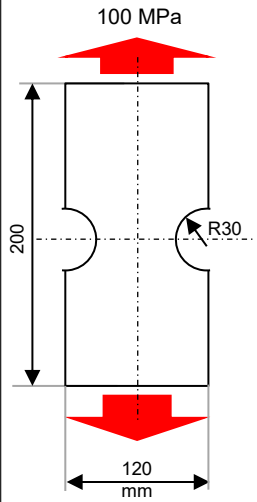


# Przykład 2a Próbka aluminiowa 2D z karbem (*model liniowy*)

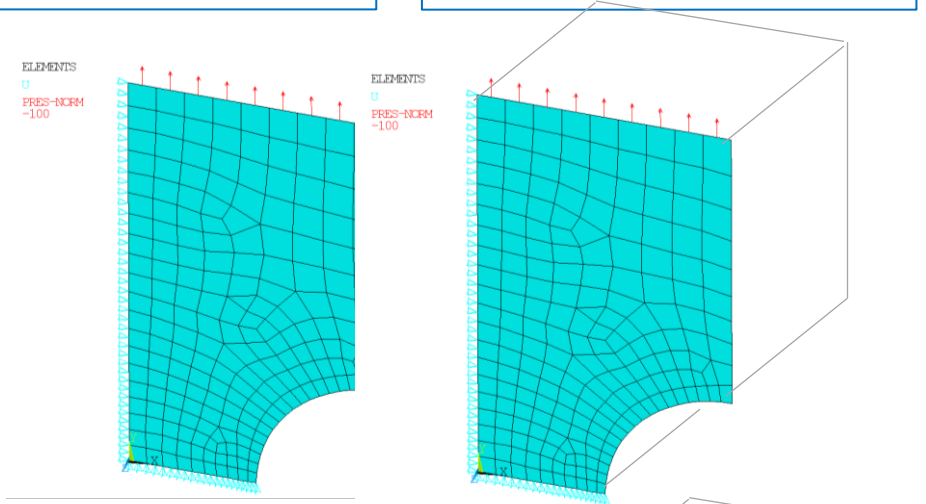
Płaski Stan Naprężenia

Płaski Stan Odkształcenia

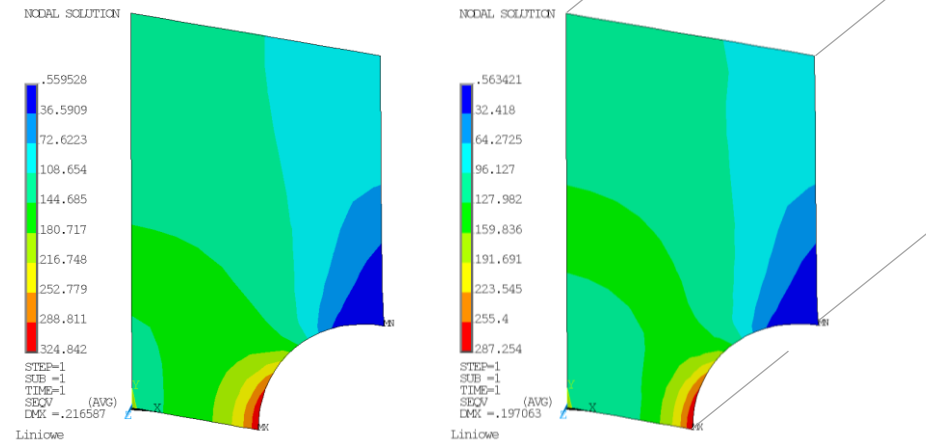
Osiowa symetria



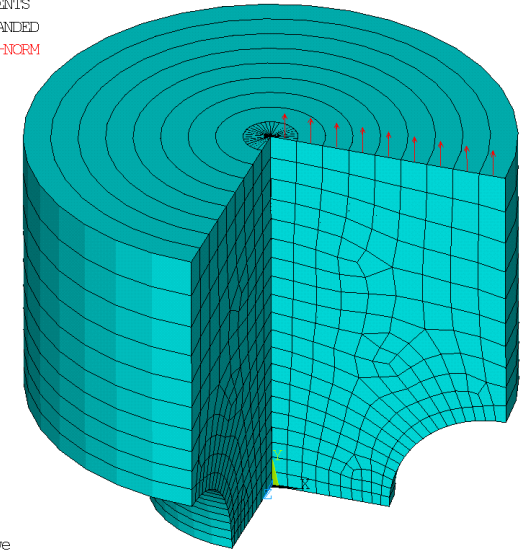
$E=7 \cdot 10^4 \text{ MPa}$   
 $\nu = 0.32$



Solid183

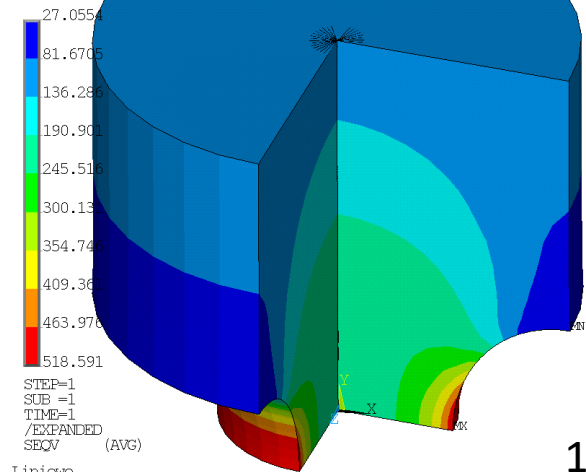


ELEMENTS  
 /EXPANDED  
 PRES-NORM  
 -100



Liniove

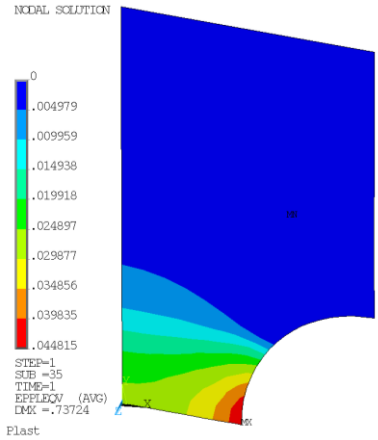
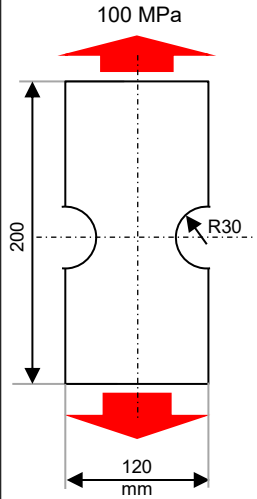
NODAL SOLUTION



Liniove

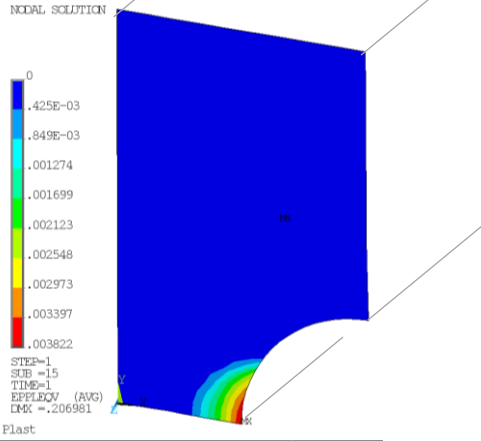
# Przykład 2b Próbka aluminiowa 2D z karbem (*model sprężysto-plast.*)

Płaski Stan Naprężenia

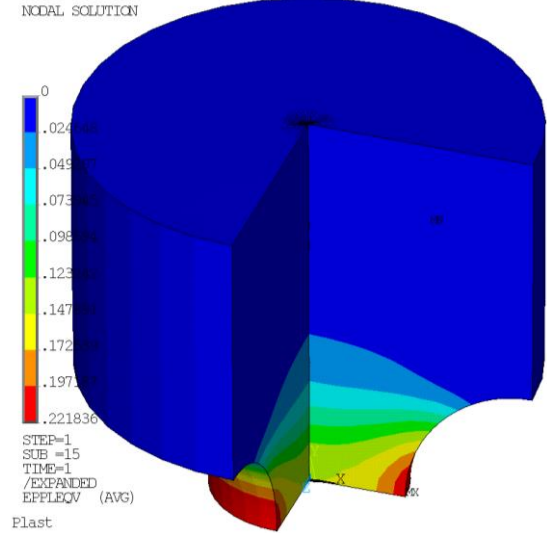


Solid183

Płaski Stan Odkształcenia

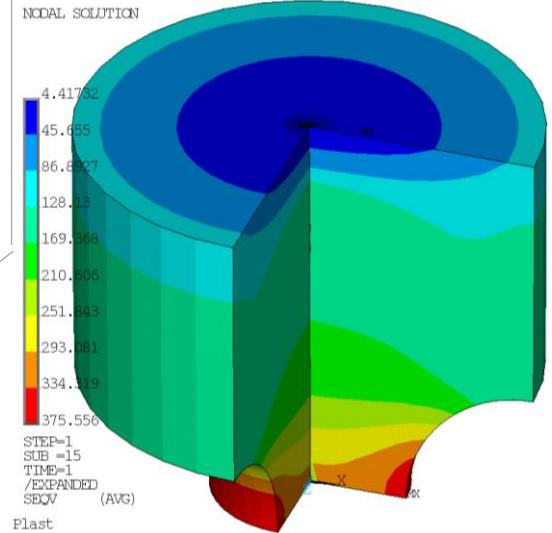
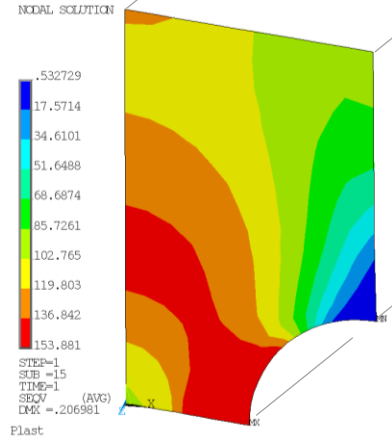
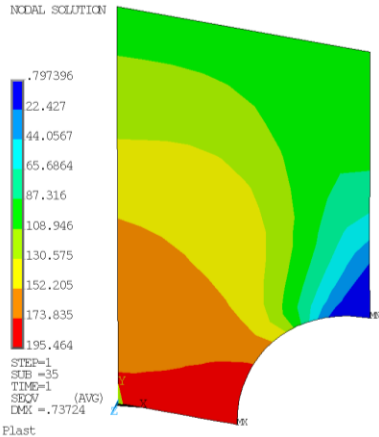
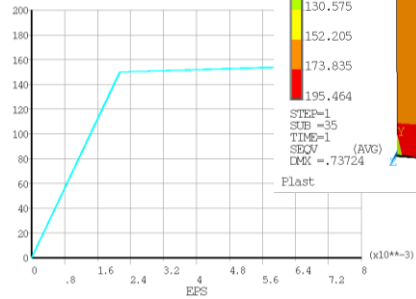


Osiowa symetria



$E=7 \cdot 10^4$  MPa  
 $\nu = 0.32$   
 $R_{0,2} = 150$  Mpa  
 $E_u = 1000$  MPa

BISO Table For Material



## MATERIAŁY LEPKOSPĘŻYSTE I LEPKOPLASTYCZNE (Reologia)

Ciała stałe mogą wykazywać cechy cieczy lepkich, co obserwuje się w konstrukcjach pozostających pod obciążeniem w długim okresie czasu, często w podwyższonej temperaturze, kiedy to zależności występujące pomiędzy siłami wewnętrznymi w materiale i deformacjami są funkcjami czasu i temperatury.

$$\varepsilon = f\left(\sigma, \frac{d\sigma}{dt}, t\right)$$

**Pełzanie** jest to zmiana wymiarów ciała w czasie pod wpływem obciążenia zewnętrznego, niekiedy znacznie mniejszego od granicy plastyczności (np. wydłużenie łopatki turbiny).

**Relaksacja** jest to spadek w czasie sił wewnętrznych w ciele stałym po skokowym wymuszeniu przemieszczenia (np. spadek naciągu w śrubach mocujących korpus turbiny parowej).

W systemie ANSYS można modelować wymienione zjawiska reologiczne (np. dla konstrukcji stalowych pracujących w temperaturach większych niż 0,3 do 0,4 temperatury topnienia) za pomocą modeli materiałów o wspólnej nazwie **creep** (dla niewielkich prędkości deformacji) lub **viscoplastic** (dla dużych prędkości deformacji). Są to modele fenomenologiczne, w których zakłada się, że prędkość odkształceń spowodowanych pełzaniem opisana jest zależnościami empirycznymi. Najprostszym modelem typu creep jest **model Nortona**:

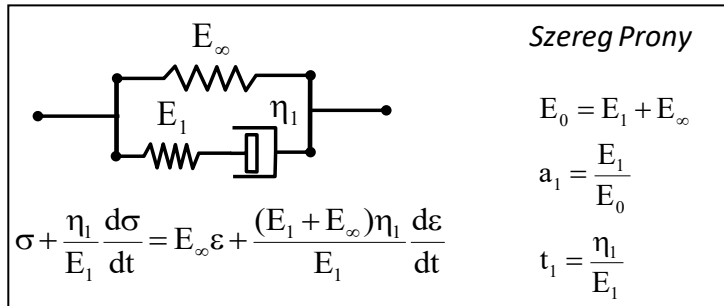
$$\frac{d\varepsilon_{cr}}{dt} = c_1 \sigma^{c_2} e^{\frac{-c_3}{T}},$$

gdzie:  $\varepsilon_{cr}$  są to zredukowane odkształcenia pełzania,  $c_1, c_2, c_3$  – stałe materiałowe,  $\sigma$  – naprężenia zredukowane,  $T$  – temperatura

Do obliczeń materiałów typu **creep** i **viscoplastic** w systemie ANSYS zalecane jest stosowanie niejawnych schematów całkowania (*implicit*). W pierwszym kroku czasowym poszukiwana jest odpowiedź sprężysta (lub sprężysto-plastyczna) na obciążenie nominalne, a w następnych krokach (za pomocą komendy *RATE, ON*) uruchamiana jest procedura do całkowania po czasie, służąca do wyznaczenia wzrostu odkształceń pełzania.

Do jednoczesnego modelowania zjawisk sprężystych i lepkich w ciałach stałych stosuje się **modele strukturalne**, które składają się z kombinacji sprężyn o module sprężystości  $E$  [MPa] i tłumików wiskotycznych o lepkości  $\eta$  [MPa·h]. W systemie ANSYS są to materiały o nazwie *viscoelastic*, w których **odpowiedź struktury na wymuszenie siłowe lub przemieszczeniowe jest sumą odpowiedzi natychmiastowej, pochodzącej od części sprężystej i odpowiedzi zachodzącej w czasie, pochodzącej od części lepkiej.**

Przykładem modelu typu *viscoelastic* jest model standardowy, będący uproszczeniem szeregu Prony, składający się z dwóch gałęzi połączonych równolegle (*jednej gałęzi sprężystej, drugiej ze sprężyną i tłumikiem połączonymi szeregowo*).

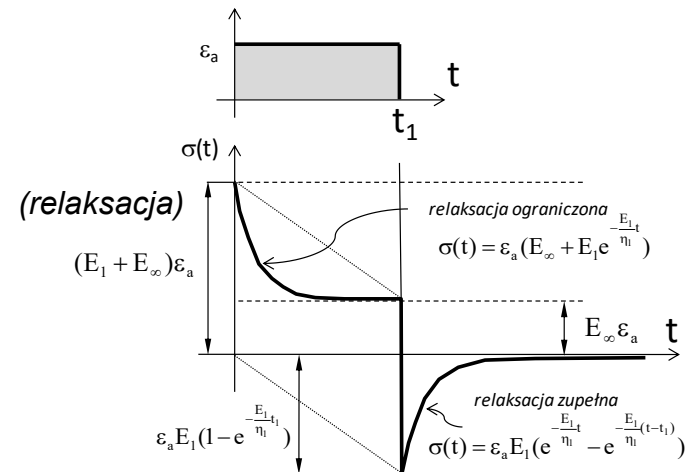
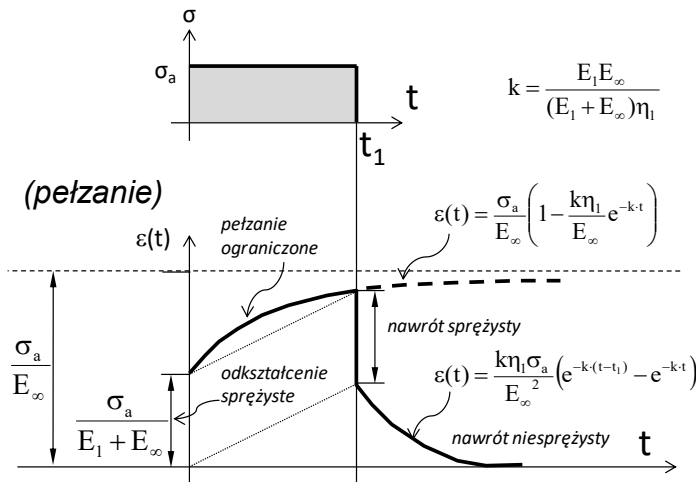


← *Model strukturalny standardowy, równanie konstytutywne, współczynniki w szeregu Prony*

parametry zastępcze:

$E_0$  – moduł Younga (natychmiastowy) [MPa],  
 $a_1$  – bezwymiarowy parametr określający sprężystość pierwszej gałęzi lepkoelastycznej  
 $t_1$  – stała czasowa [h].

Zachowanie modelu standardowego można przedstawić za pomocą wykresów dla prób pełzania i relaksacji z odciążeniem. Standardowy model trójparametrowy jest często stosowany do symulacji materiałów wykazujących cechy lepkoelastyczne.

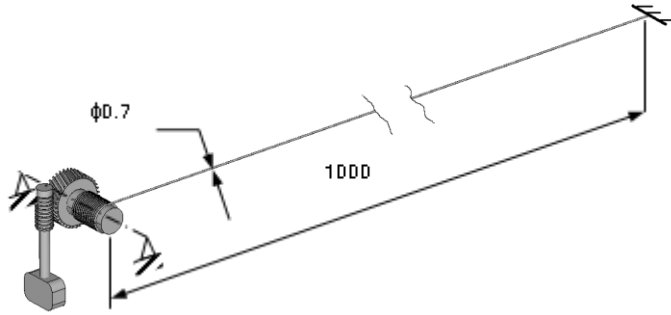


Charakterystyki modelu standardowego w próbie pełzania dla impulsu wymuszenia:  $\sigma_a$  – naprężenie pełzania

Charakterystyki modelu standardowego w próbie relaksacji dla impulsu wymuszenia:  $\varepsilon_a$  – odkształcenie relaksacji

# Zagadnienie typu viscoelastic (dla dużych prędkości deformacji)

## Przykład 3 Model struny z przekładnią ślimakową (relaksacja)



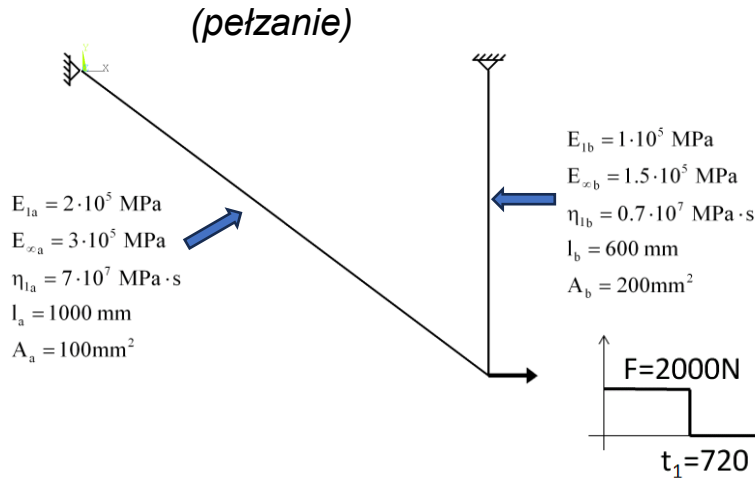
Nylonowa struna instrumentu muzycznego podczas zakładania podlega relaksacji (rys.).

Naciąg uzyskiwany jest poprzez przekładnię ślimakową (samohamowną) przez nawijanie struny na sworzeń.

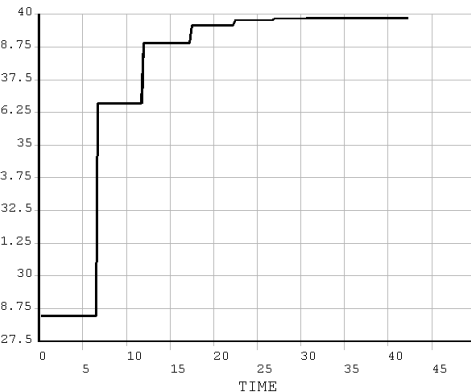
Naciąg struny koryguje się kilkakrotnie za pomocą dodatkowych obrotów pokrętki. Siłę nominalną naciągu  $F_n=76.7$  N można zmierzyć stroikiem na podstawie częstotliwości drgań struny, stąd przy każdej korekcie naciąg dochodzi do wartości nominalnej, a następnie spada w czasie ze względu na relaksację materiału. Zadaniem jest uzyskanie możliwie najkrótszego czasu ustabilizowania się naciągu nominalnego w strunie oraz niedopuszczenie do jej zerwania (naciąg maksymalny  $F_{max}=150$ N).

## Przykład 4 Model kratownicy (pełzanie)

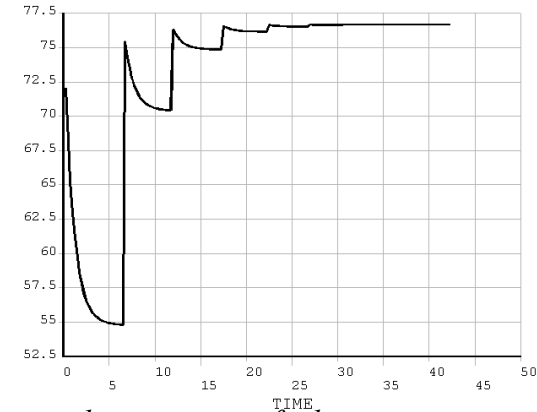
Dla kratownicy statycznie wyznaczalnej, której pręty różnią się wartościami stałych lepko-sprężystych opisujących model standardowy, przeprowadzić obliczenia pełzania dla impulsu siły.



UX\_2 [mm]



SMISC1\_2 [N]



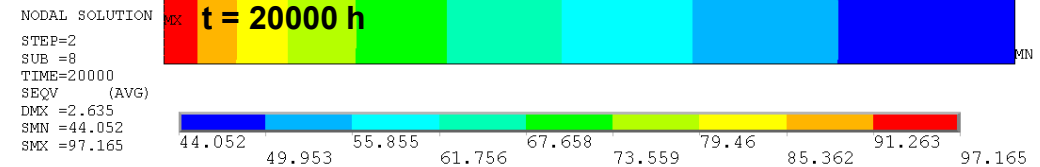
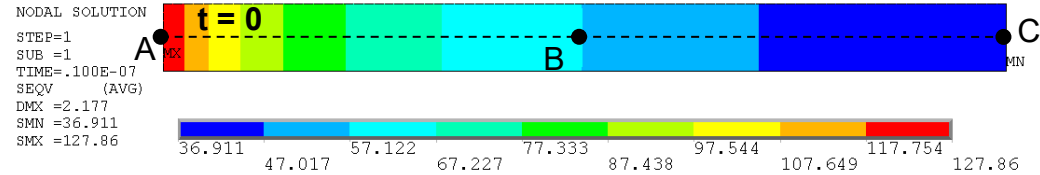
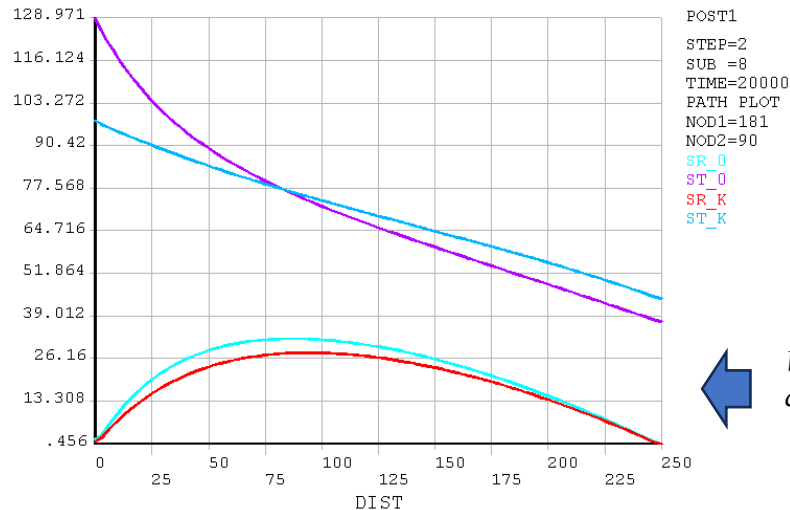
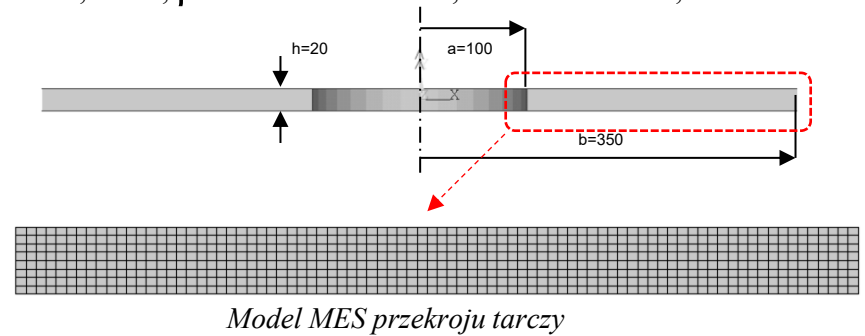
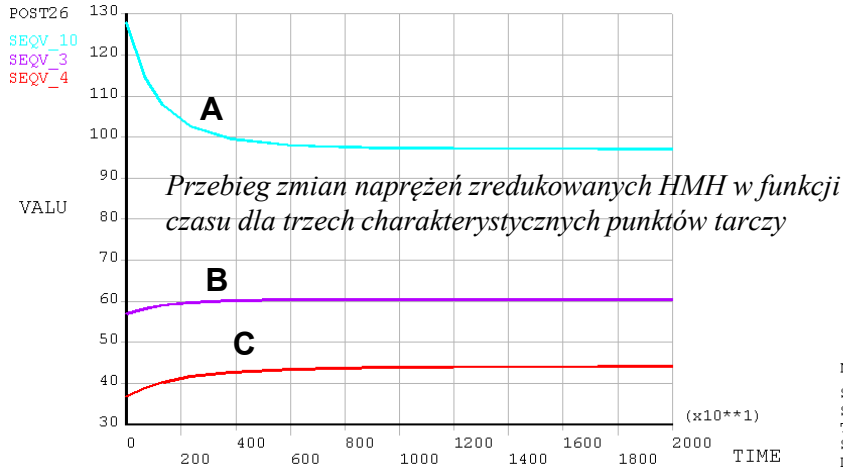
Wymuszenie przemieszczeniowe i siła w strunie w funkcji czasu

# Zagadnienie typu creep (dla niewielkich prędkości deformacji)

## Przykład 5 Tarcza wirująca obciążona temperaturą (pełzanie)

Stalowa tarcza kołowa o stałej grubości z otworem obciążona jest siłami masowymi pochodzącymi od wirowania z częstością kołową  $\omega$  oraz podgrzana do stałej temperatury pracy  $T_p$ . Wyznaczyć przemieszczenia i naprężenia w tarczy w stanie początkowym oraz wywołane pełzaniem po 20000h. Do obliczeń przyjmij model Nortona.

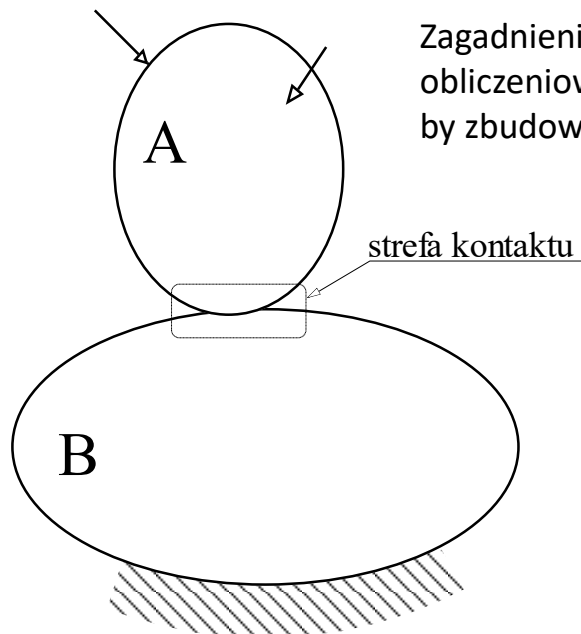
Dane dla temperatury  $T_p$ :  $E = 1.75 \cdot 10^5$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $B = 3.38 \cdot 10^{-11}$  MPa<sup>-2</sup>·h<sup>-1</sup>,  $n = 2$ ,  $\rho = 7.8 \cdot 10^{-9}$  Ns<sup>2</sup>/mm<sup>4</sup>,  $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}$  1/K,  $\omega = 400$  rad/s.



Rozkłady naprężeń zredukowanych HMH dla chwili  $t = 0$  i  $t = 20000$ h uzyskane metodą MES

Wykres naprężeń promieniowych (SR) i obwodowych (ST) dla dwóch różnych chwil czasowych wzdłuż promienia tarczy (SR\_0 i ST\_0 – dla chwili  $t = 0$ , SR\_K, ST\_K dla chwili  $t = 20000$ h)

## ZAGADNIENIA KONTAKTU CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH



Zagadnienia kontaktu są silnie nieliniowe i zwykle wymagają znacznych nakładów obliczeniowych. Z tego względu ważne jest właściwe zrozumienie fizycznej strony zadania by zbudować efektywny model numeryczny.

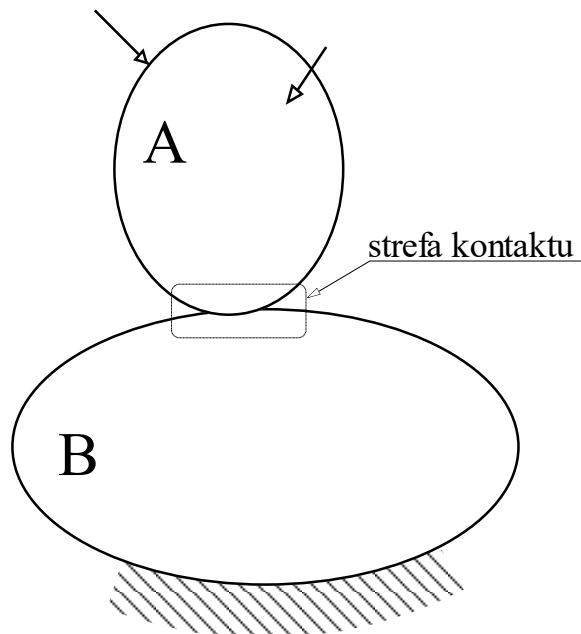
Zadania kontaktu wiążą się z dwoma **podstawowymi trudnościami**:

- strefa kontaktu nie jest dokładnie znana i zależy m.in. od takich czynników, jak obciążenie, własności materiałowe, warunki brzegowe (*kontaktujące się powierzchnie ciał mogą wchodzić w kontakt i tracić go w sposób trudny do przewidzenia*).
- tarcie jest dodatkowym czynnikiem wprowadzającym nieliniowość i może czasem powodować trudności ze zbieżnością procesu iteracyjnego.

Istnieją zasadniczo dwie klasy zagadnień kontaktu:

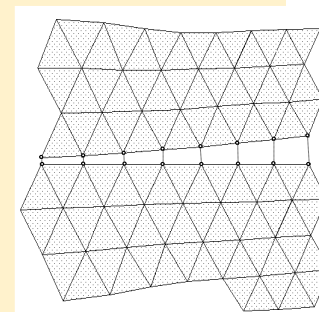
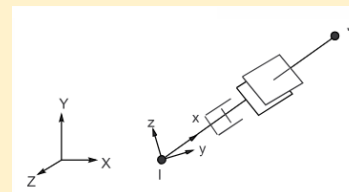
- kontakt między ciałem sztywnym a sprężystym (rigid-to-flexible)
  - kontakt między ciałami sprężystymi (flexible-to-flexible).
- 
- W przypadku zadań, w których istnieje duża dysproporcja między sztywnością kontaktujących się ciał, wskazane jest użycie kontaktu typu **rigid-to-flexible** (*przykładem takich zadań są zadania obróbki plastycznej metali*)
  - Druga klasa zagadnień, **flexible-to-flexible**, występuje w przypadku kontaktu ciał o zbliżonej wartości modułu Younga (*należy wtedy uwzględnić podatność wszystkich będących w kontakcie ciał*).

# ZAGADNIENIA KONTAKTU CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH

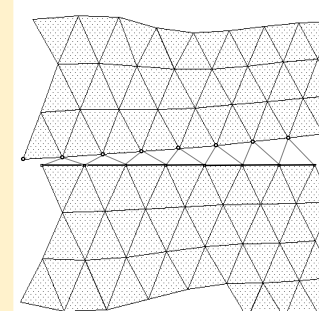
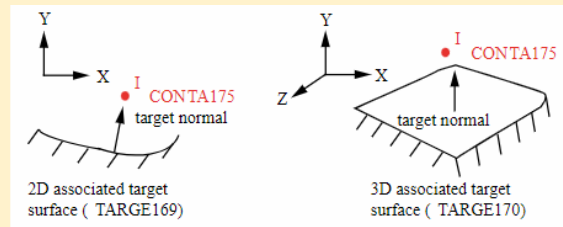


Dostępnych jest kilka modeli kontaktu:

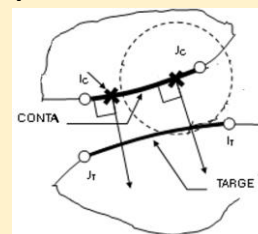
- kontakt typu węzeł-węzeł (*node-to-node*)



- typu węzeł-powierzchnia (*node-to-surface*)



- typu powierzchnia-powierzchnia (*surface-to-surface*)



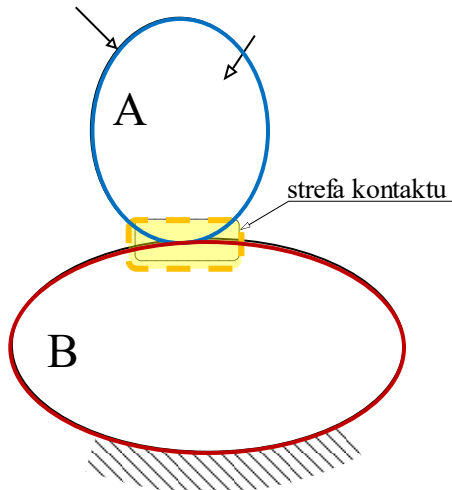
Każdy typ kontaktu używa innego zestawu elementów kontaktu.

W zadaniu kontaktu ważne jest zdefiniowanie strefy potencjalnego kontaktu reprezentowanego przez węzły brzegowe lub elementy związane z powierzchnią brzegową.

Model obliczeniowy rozpoznaje możliwe pary kontaktowe przez specjalne elementy, które zostają zbudowane w tej strefie.

# Idea tworzenia elementów strefy kontaktu

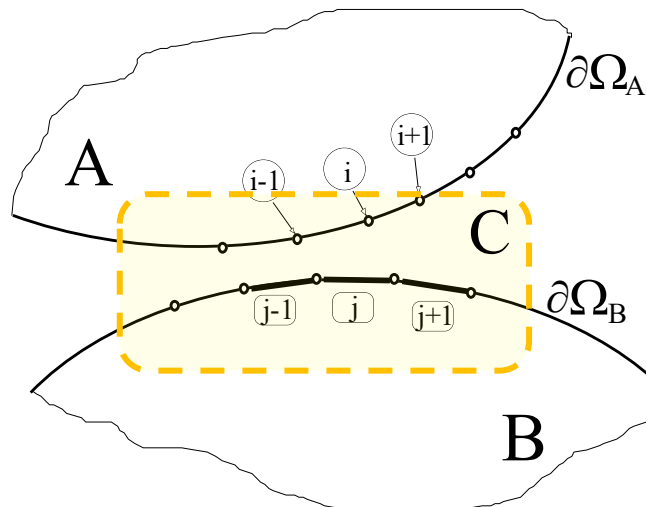
Sytuacja kontaktu dwóch ciał



Nieliniowość kontaktu:

$$[K]\{q\} = \{F\}$$

Strefa kontaktu



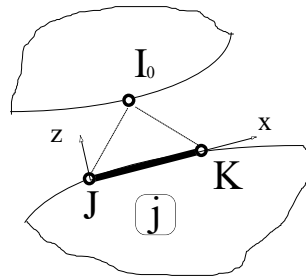
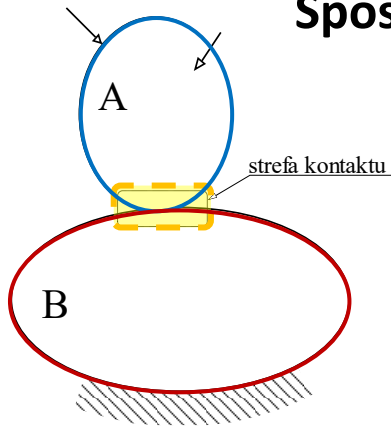
Brak kontaktu:

$$K = \begin{bmatrix} K_A & \\ & K_B \end{bmatrix}$$

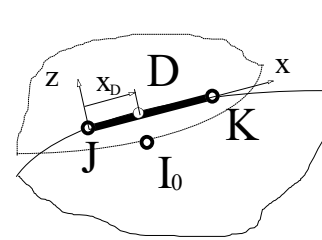
Jest kontakt:

$$K = \begin{bmatrix} K_A & & \\ & K_C & \\ & & K_B \end{bmatrix}$$

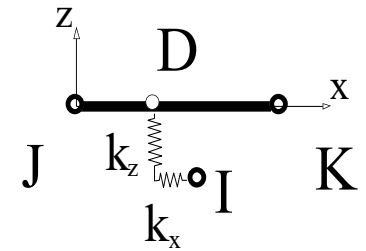
# Sposób wchodzenia w kontakt i powstanie nowego elementu na przykładzie *kontaktu node-segment*



faza zbliżania



wejście w kontakt



element kontaktu

## Procedura śledzenia warunków kontaktu:

1. Niech ciało A, wchodzące w kontakt, ma na swym brzegu wyodrębnione węzły mogące potencjalnie wejść w kontakt z ciałem B,
2. Niech ciało B, będące celem kontaktu, ma na brzegu segmenty (boki elementów) mogące potencjalnie zetknąć się z węzłami brzegowymi ciała A,
3. W każdej chwili czasu, każdy segment ciała B śledzi wybrane najbliższe węzły mogące wejść w kontakt.
4. W chwili gdy jeden z węzłów – znajdzie się blisko segmentu (o węzłach J i K), zostaje sprawdzona jego współrzędna względem lokalnego układu segmentu.
5. Jeśli węzeł trafi w segment, wtedy węzeł zostaje związany z segmentem elementami sprężystymi w punkcie trafienia. Sprężysty element kontaktu ma sztywność normalną na tyle dużą, by praktycznie uniemożliwić penetrację. Sztywność styczna jest uzależniona od nacisków i współczynnika tarcia.
6. Założony zostaje nowy element
7. Przemieszczenie węzła może odbywać się teraz stycznie do linii segmentu.

Związek pomiędzy siłami w "sprężynkach" elementu a przemieszczeniami w układzie lokalnym możemy zapisać jako:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} u_x \\ z_I \end{Bmatrix} \quad \text{dla} \quad z_I \leq 0, \quad |F_x| \leq \mu \cdot |F_z|$$

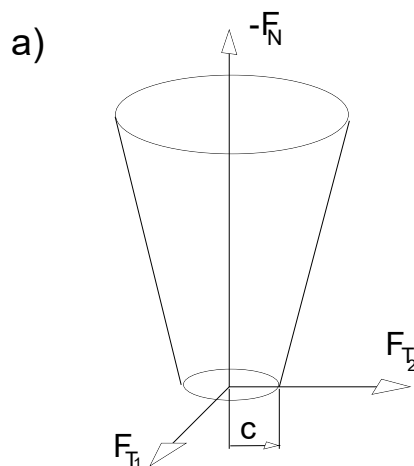
gdzie:  $k$  – jest stałą sprężystą,  
 $u_x$  – jest przemieszczeniem punktu względem punktu trafienia ,  
 $z_I$  – jest współrzędną punktu w układzie lokalnym segmentu,  
 $\mu$  – jest współczynnikiem tarcia.

## Możliwe są następujące przypadki kontaktu:

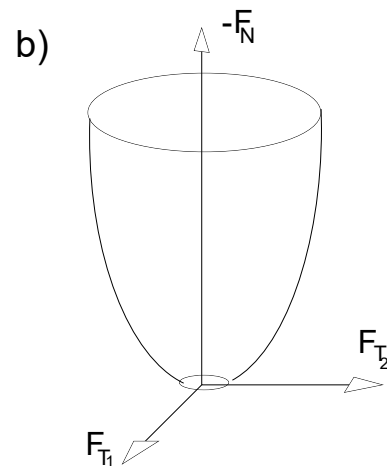
- przyleganie (brak poślizgu),
- poślizg z tarcie; punkt D zmienia swoje położenie z D na D1 (poślizg).

## Modelowanie tarcia

Przykładowe kryteria poślizgu:



a) stożek Coulomba,



b) paraboloida.

W przypadku idealnego tarcia (rys. a) gdy siła tarcia zależy tylko od siły nacisku mamy:

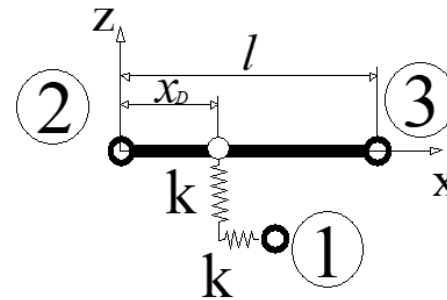
$$Y(F) = \begin{cases} F_N \leq 0 & \text{- kontakt} \\ |F_T| + \mu F_N - C \leq 0 & \text{- poślizg.} \end{cases} \quad (\text{kryterium poślizgu})$$

gdzie:  $|F_T| = \sqrt{F_{T1}^2 + F_{T2}^2}$ ,  $F_T$  - jest składową styczną siły w kierunku poślizgu,

$\mu$  - jest współczynnikiem tarcia,

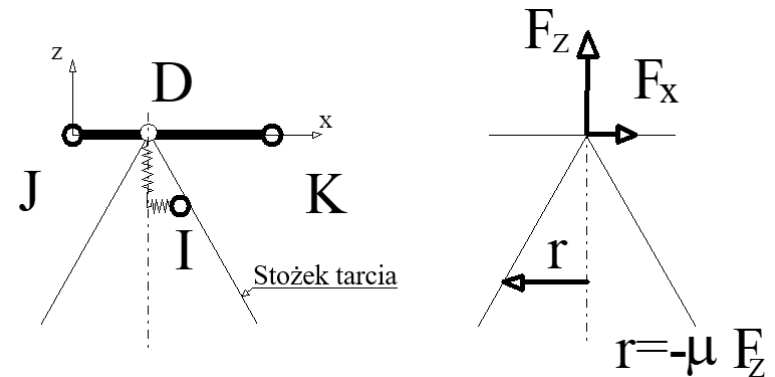
$C$  - jest stałą charakteryzującą adhezję.

Możliwe są następujące przypadki kontaktu:



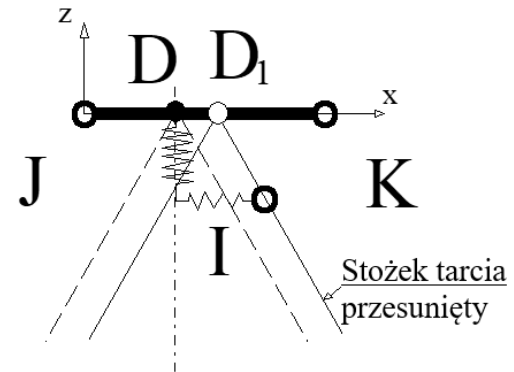
**Przyleganie** ( brak poślizgu - zmianę sił w "sprężynkach" elementu możemy wtedy zapisać:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_z \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta z_I \end{Bmatrix} \text{ dla } z_I \leq 0, |F_x| < \mu \cdot |F_z| .$$



**Poślizg z tarciem** - punkt D zmienia swoje położenie z D na  $D_1$  (poślizg), a siły w "sprężynkach" elementu są:

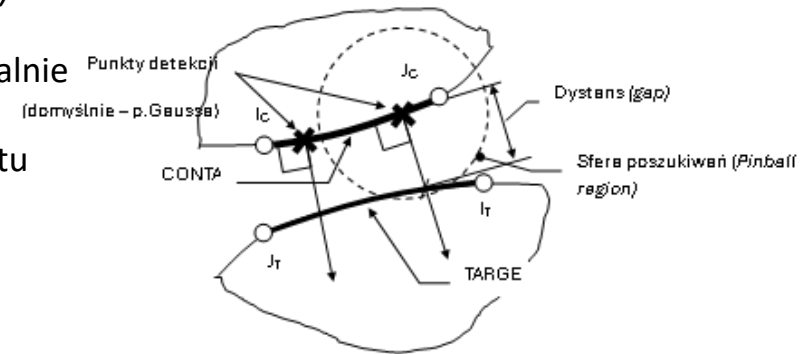
$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_z \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta z_I \end{Bmatrix} \text{ dla } z_I < 0, |F_x| = \mu^* |F_z| .$$



## Idea kontaktu typu **surface-to-surface**

Na brzegu ciała będącego celem kontaktu umieszczane są elementy kontaktowe CONTA, a na brzegu ciała, które ma być celem – osobne elementy celu TARGE (w przypadku stosowania sztywnego celu (rigid target) można wygenerować bezpośrednio element TARGE o wybranym kształcie).

Oddziaływanie pomiędzy elementami CONTA i TARGE jest potencjalnie możliwe, gdy posiadają one ten sam numer stałej typu real. Do kontaktu dochodzi, gdy nastąpi penetracja powierzchni kontaktu przez powierzchnię celu, co jest śledzone w punktach detekcji kontaktu, którymi są punkty całkowania związane z węzłami lub punktami Gaussa.



Element kontaktu jest powstrzymany więzami tak by nie penetrował przez powierzchnię celu w tych punktach detekcji. Jednak powierzchnia celu może penetrować przez powierzchnię kontaktu. Używanie punktów Gaussa jako punktów detekcji daje z reguły lepsze wyniki niż śledzenie węzłów kontaktu. Głębokość penetracji jest mierzona w kierunku normalnym od powierzchni kontaktu w punktach detekcji do powierzchni celu.

Położenie i ruch elementu CONTA względem związanego z nim elementu TARGE wyznacza status kontaktu elementu.

Program monitoruje każdy z elementów kontaktu i przypisuje mu jeden ze statusów:

**STAT = 0** – otwarty odległy (element celu znajduje się poza sferą wokół punktu całkowania elementu kontaktu - pinball region)

**STAT = 1** – otwarty bliski (element celu znajduje się wewnątrz sfery wokół punktu całkowania elementu kontaktu - pinball region)

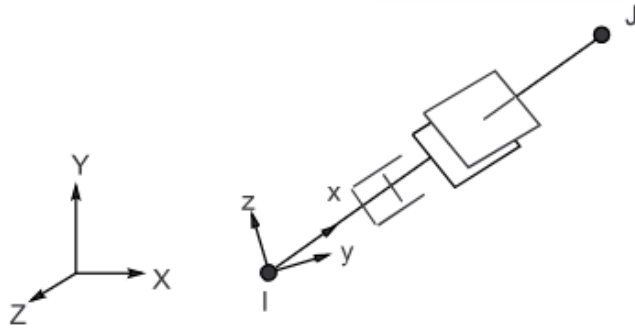
**STAT = 2** – kontakt z poślizgiem

**STAT = 3** – kontakt z przyleganiem

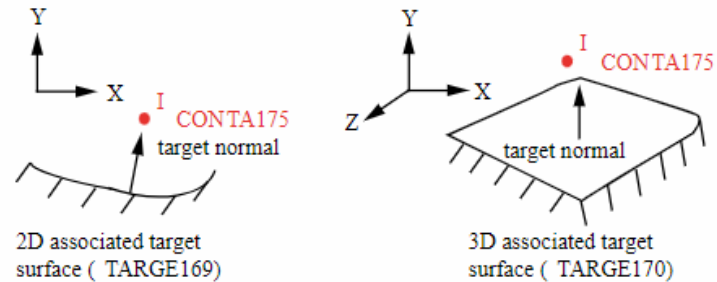


# Przykładowe typy elementów kontaktu w programie ANSYS

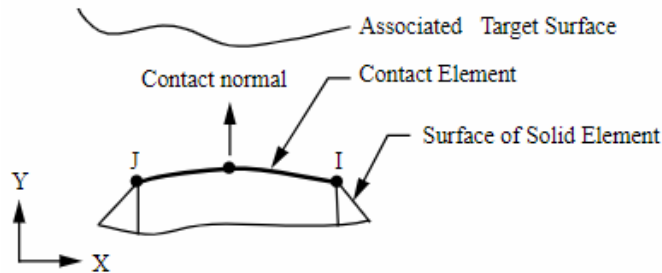
## CONTA178 - 3D Node-to-Node Contact



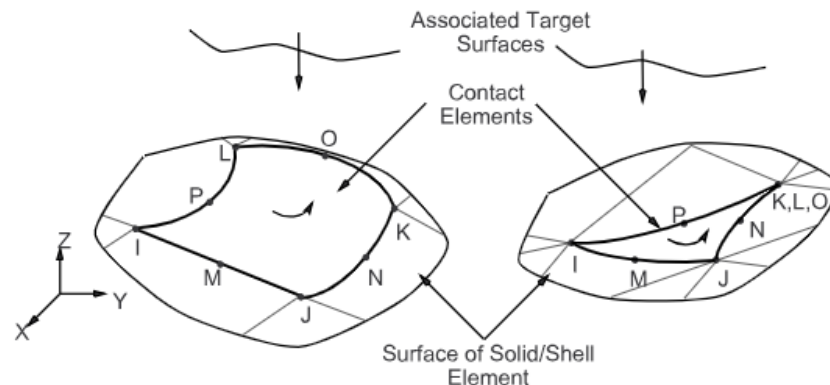
## CONTA175 - 2D/3D Node-to-Surface Contact



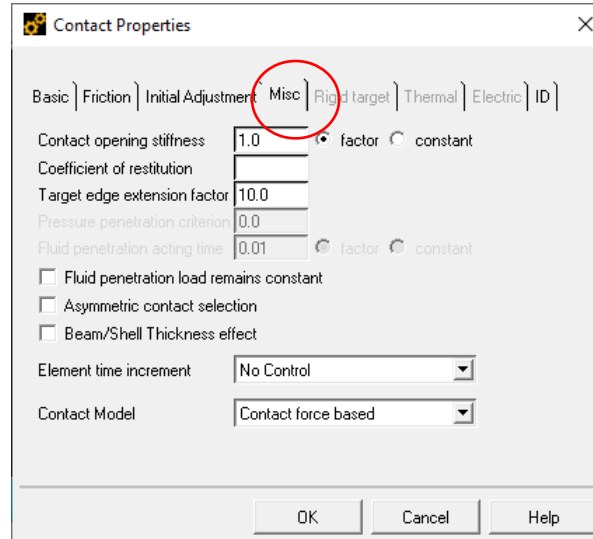
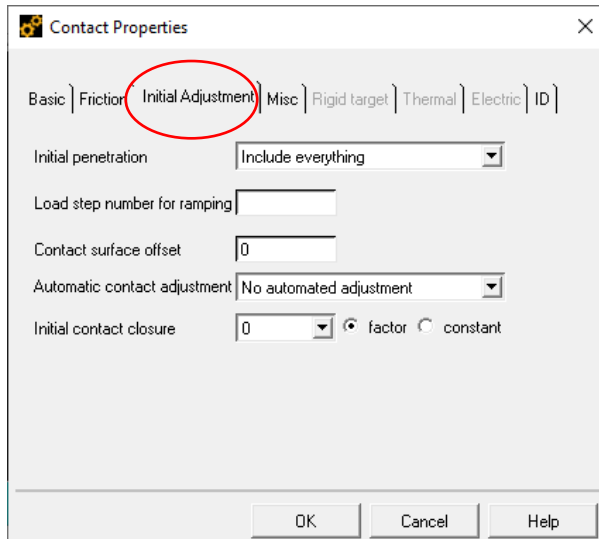
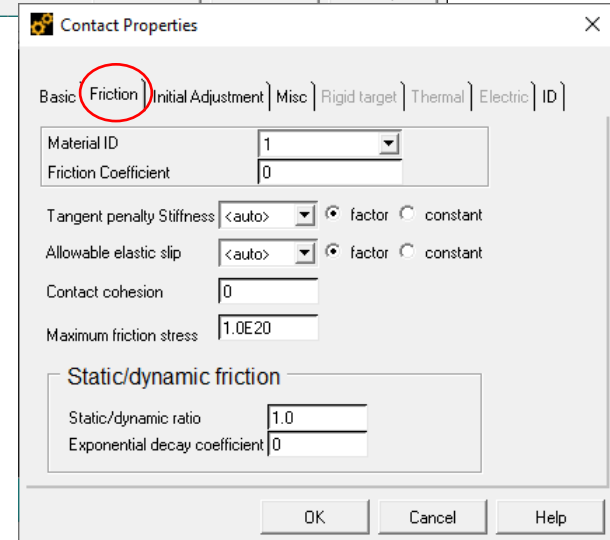
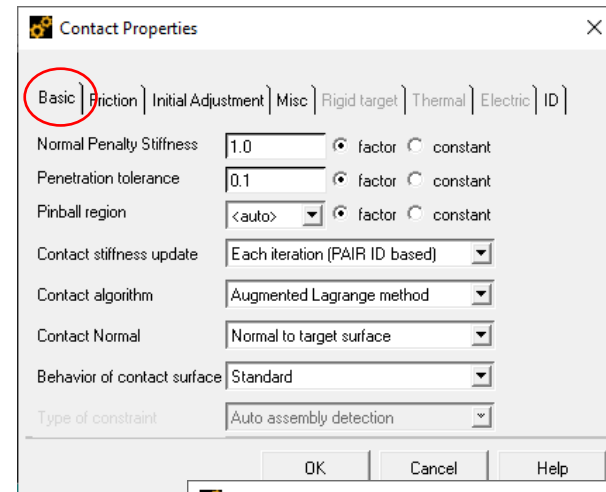
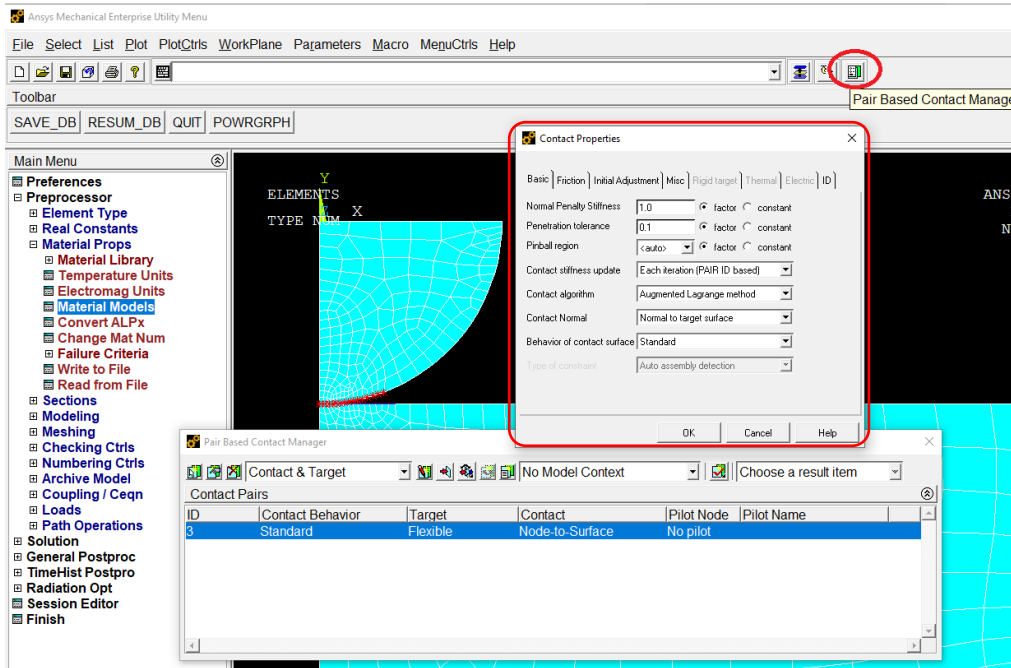
## CONTA172 - 2D 3-Node Surface-to-Surface Contact



## CONTA174 - 3D 8-Node Surface-to-Surface Contact



# Opcje kontaktu w programie ANSYS

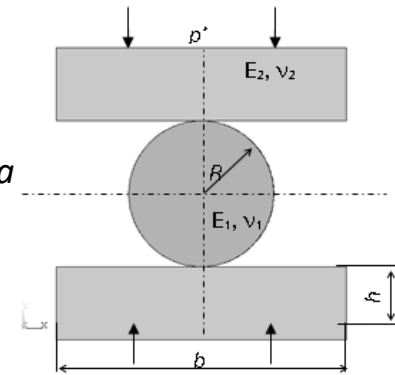


## Przykład 6a Rolka ściskana dwoma okładzinami

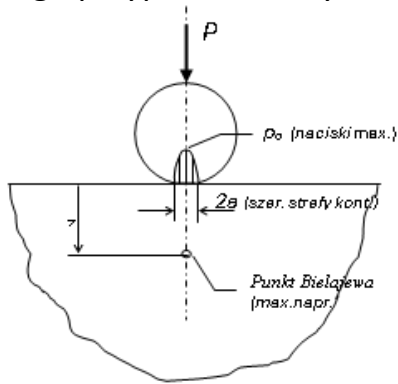
Rozwiązać zadanie ściskania stalowej rolki walcowej pomiędzy dwoma stalowymi okładzinami.

**Dane:**  $R=10\text{mm}$ ,  $h=20\text{mm}$ ,  $b=80\text{mm}$ ,  $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $p^*=10\text{MPa}$

Zagadnienie to można sprowadzić do typowego zadania sprężystego kontaktu między walcem a sprężystą półprzestrzenią. W przekroju poprzecznym układ pracuje w płaskim stanie odkształcenia (PSO).



Według wzorów Hertza dla tego przypadku mamy:



$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

$$a^2 = \frac{4PR}{\pi E^*}$$

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} = \sqrt{\frac{PE^*}{\pi R}}$$

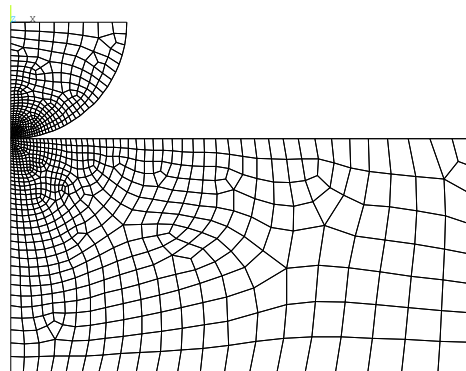
$$z = 0,78a$$

$$(\tau_{xy})_{\max} = 0,3p_0$$

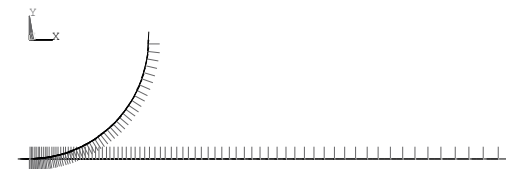
$E^*=1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $a = 0,3044 \text{ mm}$ ,

$p_0=1673 \text{ N/mm}^2$ ,  $z = 0,2374 \text{ mm}$ ,

$\tau_{\max} = 502 \text{ N/mm}^2$

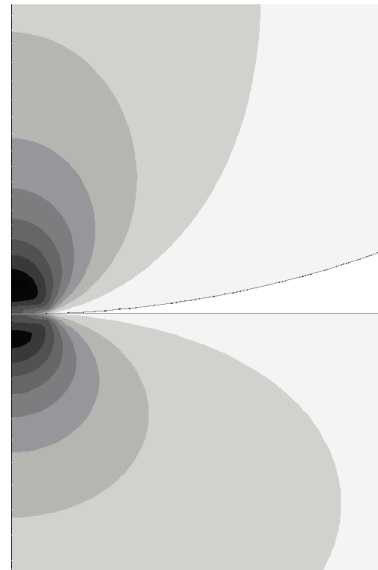
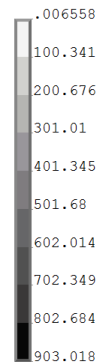


siatka elementów w zadaniu



Generacja elementów kontaktu za pomocą panelu Contact Wizard

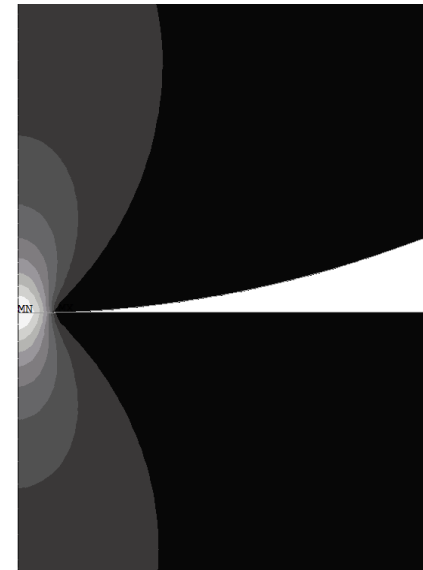
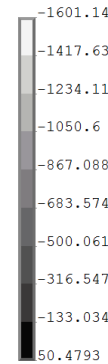
1 NODAL SOLUTION



naprężenia zredukowane wg hipotezy Hubera-Misesa

STEP=1  
SUB = 4  
TIME=1  
SEQV (AVG)  
DMX = .046814  
SMN = .006558  
SMX = 903.018

1 NODAL SOLUTION

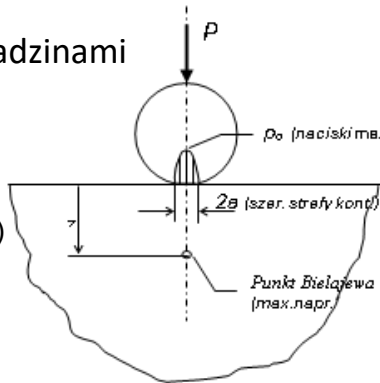


Naprężenia normalne w kierunku pionowym 27

STEP=1  
SUB = 4  
TIME=1  
RSYS=0 (AVG)  
DMX = .046814  
SMN = -1601.14

# Przykład 6b Rolka ściskana dwoma okładzinami

$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $a = 0,3044 \text{ mm}$ ,  $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$ ,  
 $z = 0,2374 \text{ mm}$ ,  $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

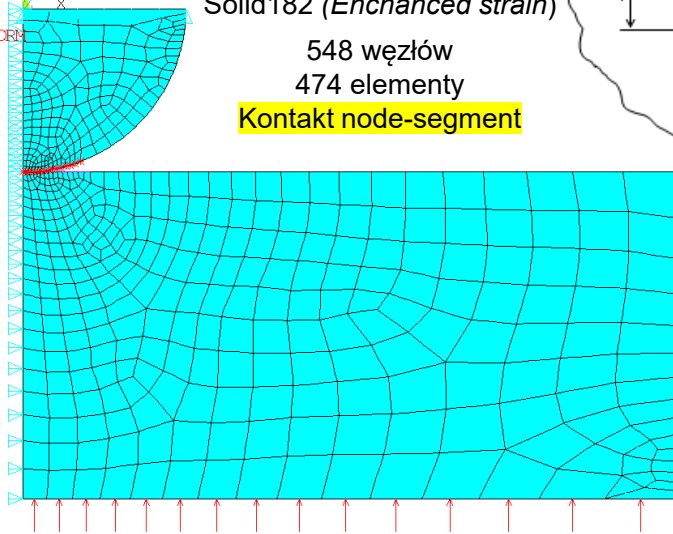


**PSO**  
 ELEMENTS  
 TYPE NUM  
 U  
 PRES-NORM  
 10

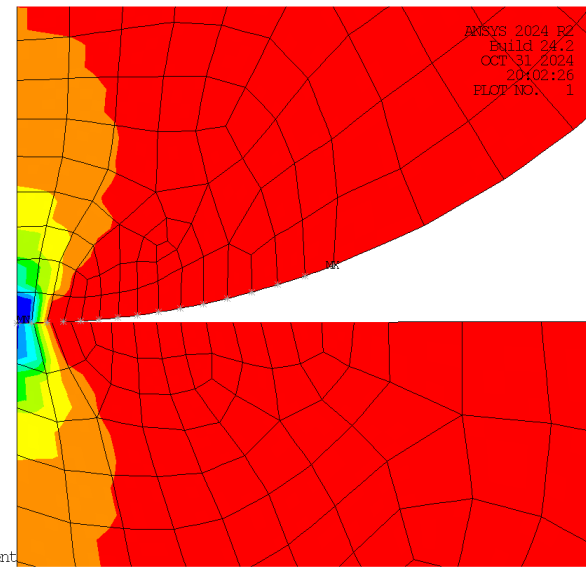
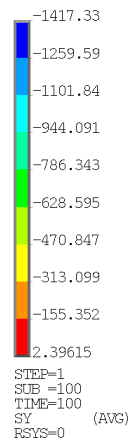
Solid182 (Enhanced strain)

548 węzłów  
474 elementy

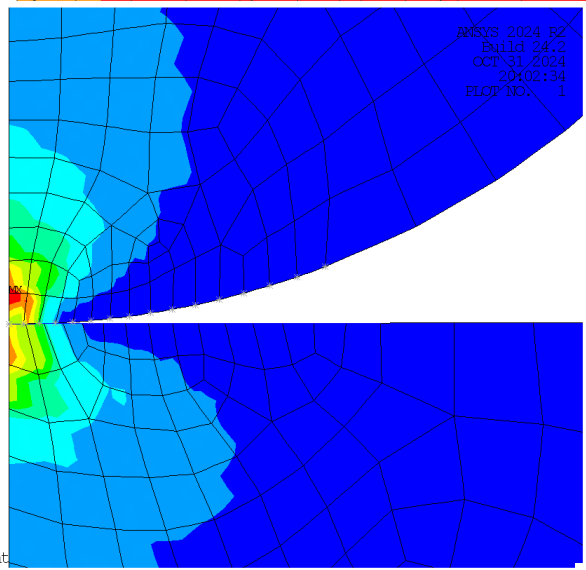
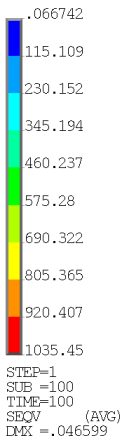
**Kontakt node-segment**



NODAL SOLUTION

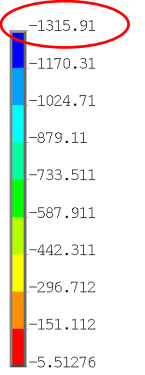


NODAL SOLUTION

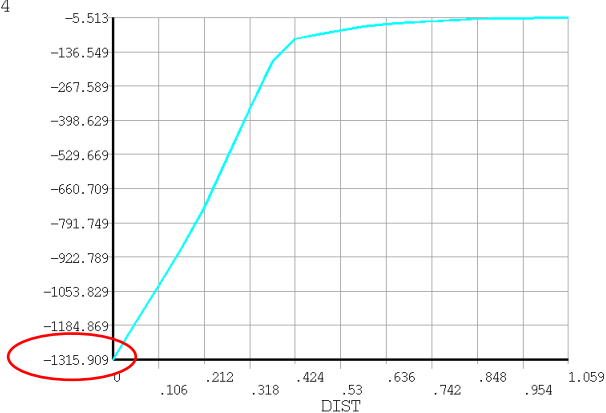


Kontakt node-segment

PATH= AB  
 VALUE= SY  
 SCAL=20

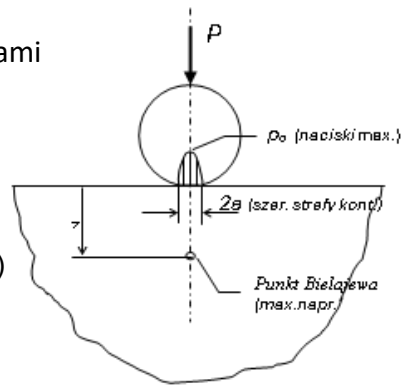


NOD2=264  
SY



Kontakt node-segment

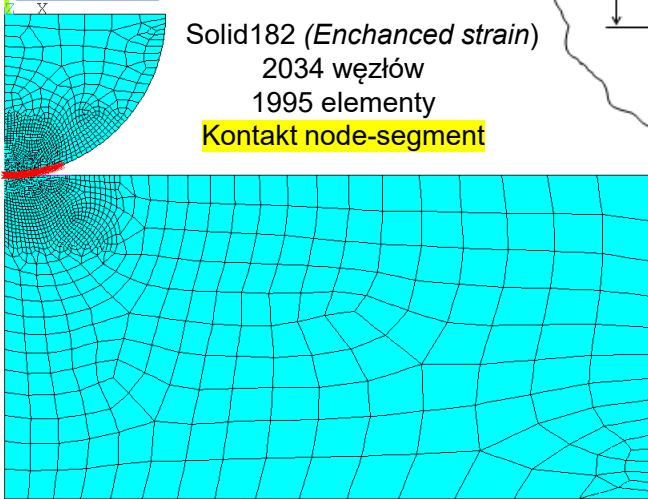
# Przykład 6c Rolka ściskana dwoma okładzinami



$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $a = 0,3044 \text{ mm}$ ,  $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$ ,  
 $z = 0,2374 \text{ mm}$ ,  $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

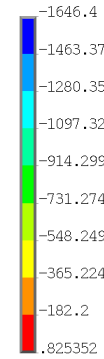
ELEMENTS  
TYPE NUM

PSO



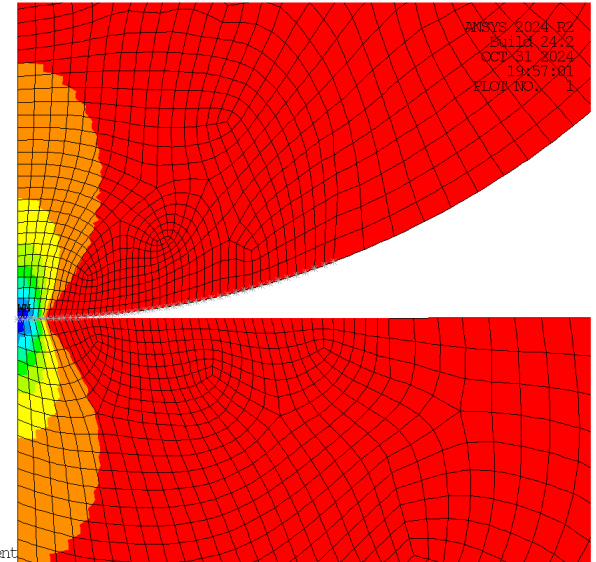
Solid182 (Enhanced strain)  
2034 węzłów  
1995 elementy  
Kontakt node-segment

NODAL SOLUTION

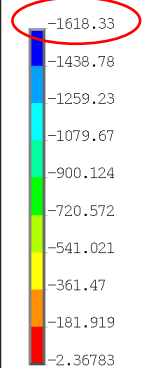


STEP=1  
SUB =100  
TIME=100  
SY (AVG)  
RSYS=0

Kontakt node-segment

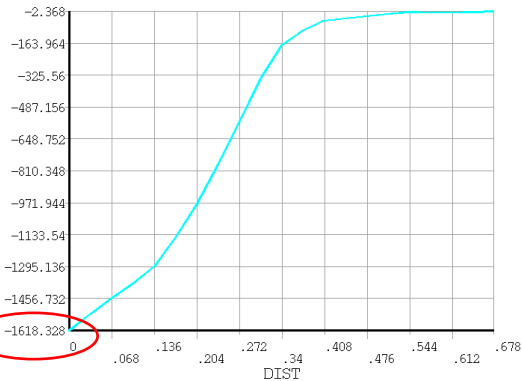


PATH= AB  
VALUE= SY  
SCAL=20

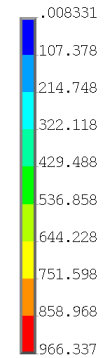


Kontakt node-segment

NOD2=647  
SY

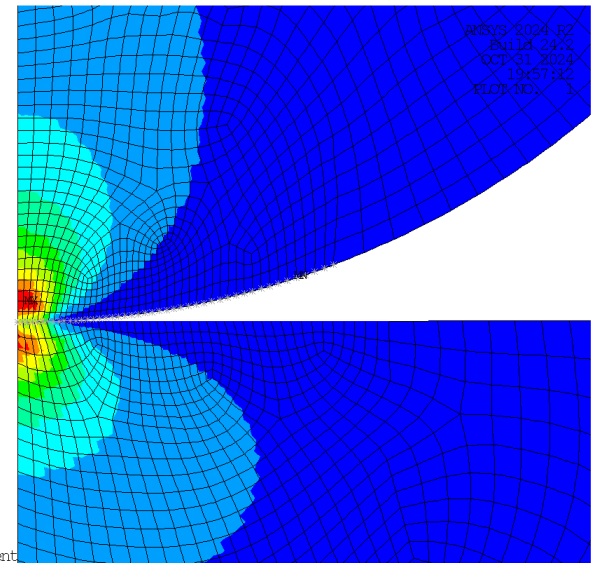


NODAL SOLUTION

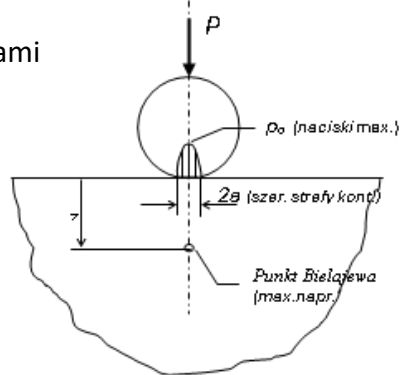


STEP=1  
SUB =100  
TIME=100  
SEQV (AVG)  
DMX = .046344

Kontakt node-segment



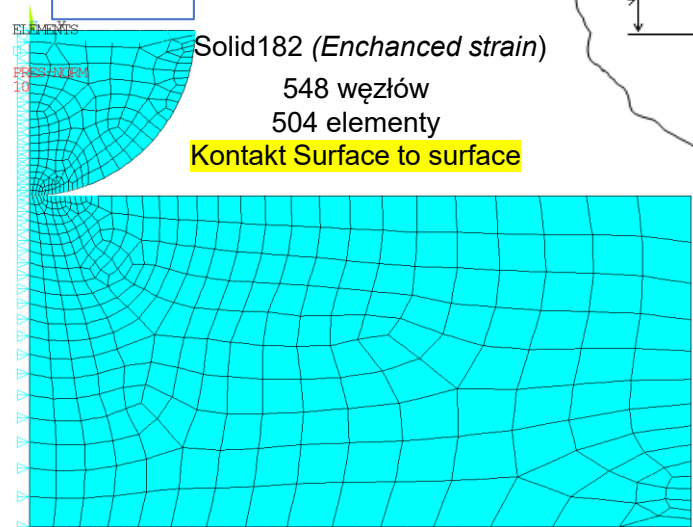
# Przykład 6d Rolka ściskana dwoma okładzinami



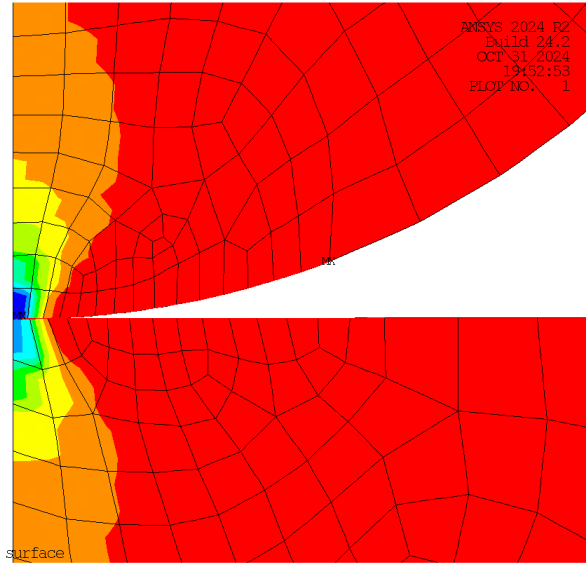
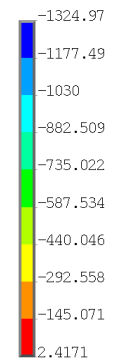
$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $a = 0,3044 \text{ mm}$ ,  $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$ ,  
 $z = 0,2374 \text{ mm}$ ,  $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

PSO

Solid182 (Enchanced strain)  
 548 węzłów  
 504 elementy  
 Kontakt Surface to surface

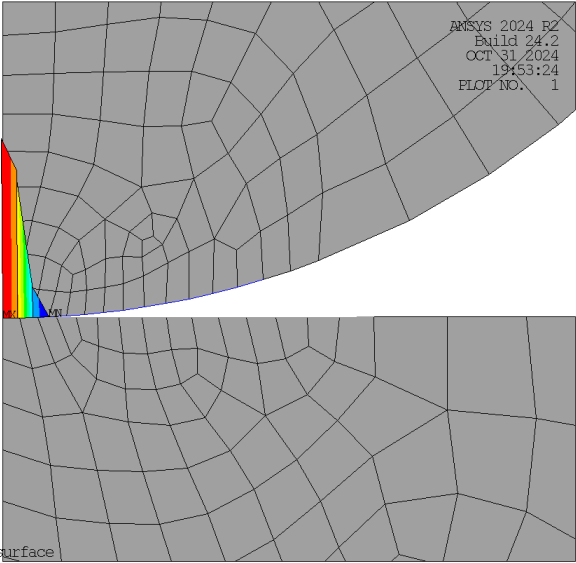
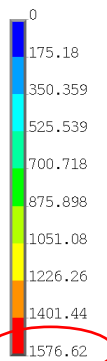


NODAL SOLUTION



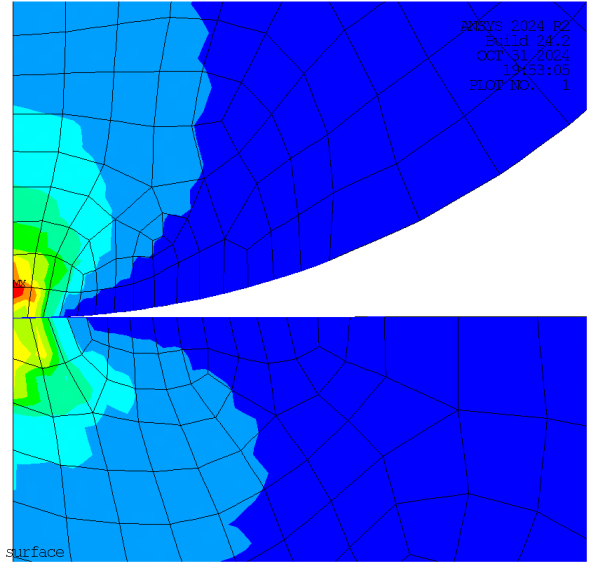
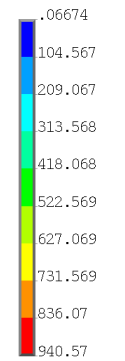
STEP=1  
 SUB =100  
 TIME=100  
 SY (AVG)  
 RSYS=0  
 Kontakt\_surface to surface

NODAL SOLUTION



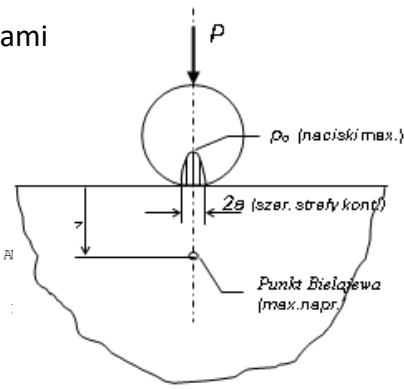
STEP=1  
 SUB =100  
 TIME=100  
 CONTACTES (AVG)  
 DMX =.046883  
 Kontakt\_surface to surface

NODAL SOLUTION



STEP=1  
 SUB =100  
 TIME=100  
 SECV (AVG)  
 DMX =.046883  
 Kontakt\_surface to surface

# Przykład 6e Rolka ściskana dwoma okładzinami



$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $a = 0,3044 \text{ mm}$ ,  $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$ ,  
 $z = 0,2374 \text{ mm}$ ,  $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

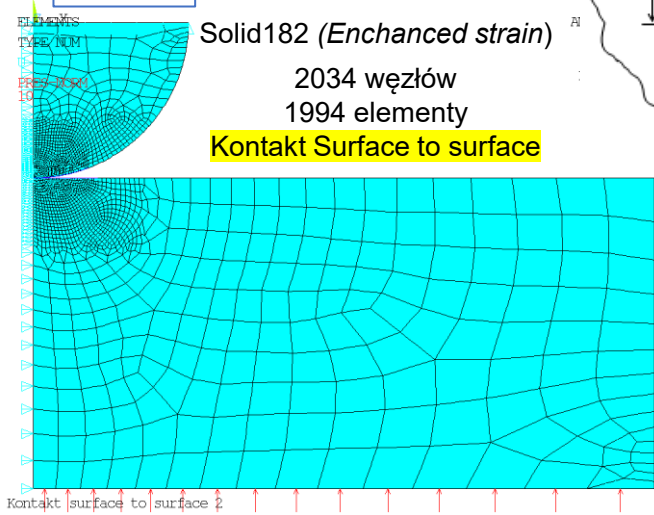
PSO

Solid182 (Enhanced strain)

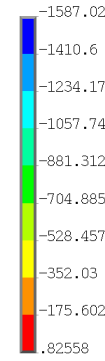
2034 węzłów

1994 elementy

Kontakt Surface to surface

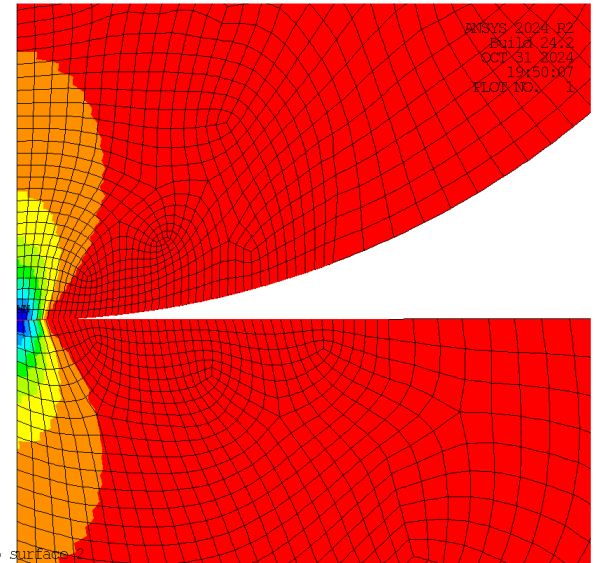


NODAL SOLUTION



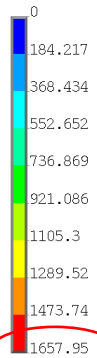
STEP=1  
SUB =100  
TIME=100  
SY (AVG)  
RSYS=0

Kontakt surface to surface 2



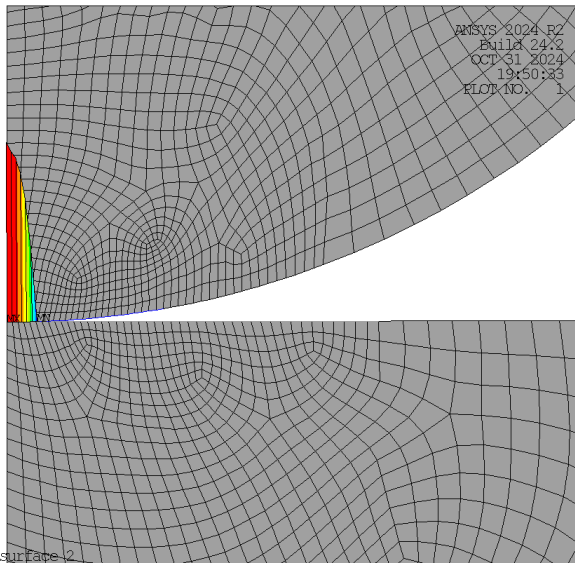
ANSYS 2024 R2  
Build 2412  
OCT-31-2024  
19:50:07  
PLOT NO. 1

NODAL SOLUTION



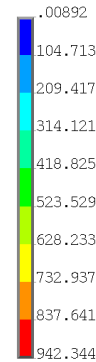
STEP=1  
SUB =100  
TIME=100  
CONTRES (AVG)  
DMX =.046541

Kontakt surface to surface 2



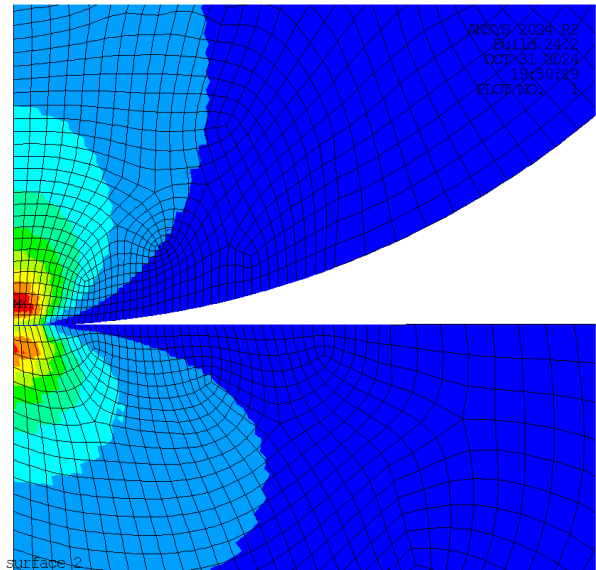
ANSYS 2024 R2  
Build 2412  
OCT-31-2024  
19:50:05  
PLOT NO. 1

NODAL SOLUTION



STEP=1  
SUB =100  
TIME=100  
SEQV (AVG)  
DMX =.046541

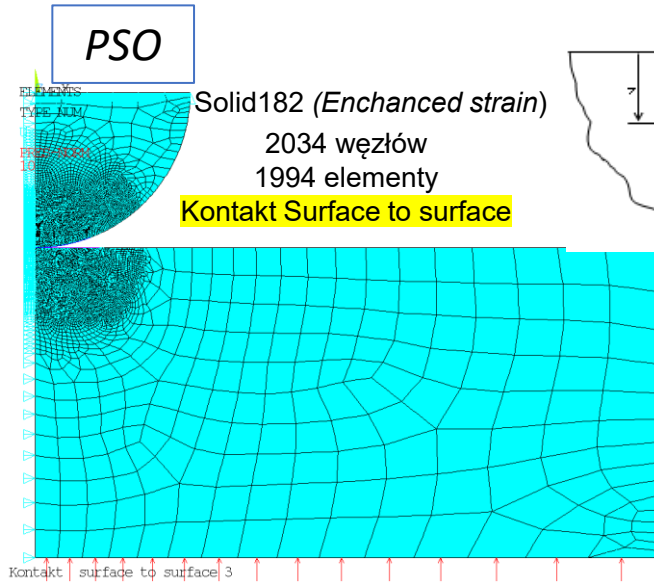
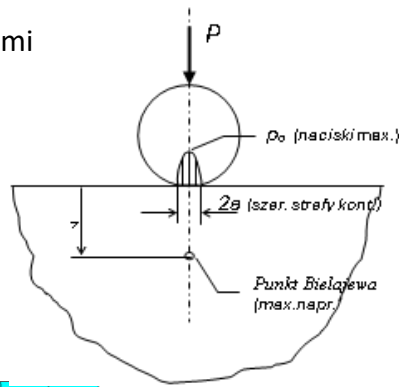
Kontakt surface to surface 2



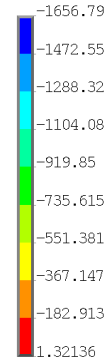
ANSYS 2024 R2  
Build 2412  
OCT-31-2024  
19:50:09  
PLOT NO. 1

# Przykład 6f Rolka ściskana dwoma okładzinami

$E^* = 1,099 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $a = 0,3044 \text{ mm}$ ,  $p_0 = 1673 \text{ N/mm}^2$ ,  
 $z = 0,2374 \text{ mm}$ ,  $\tau_{max} = 502 \text{ N/mm}^2$

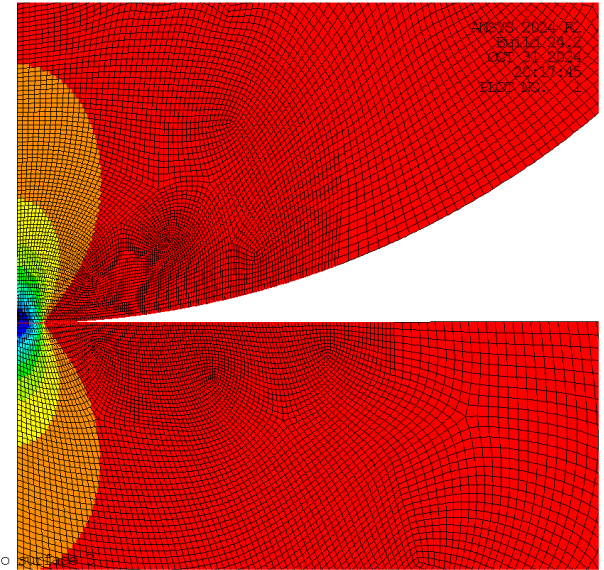


NODAL SOLUTION

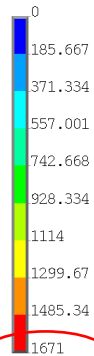


STEP=1  
 SUB =100  
 TIME=100  
 SY (AVG)  
 RSYS=0

Kontakt surface to surface 3

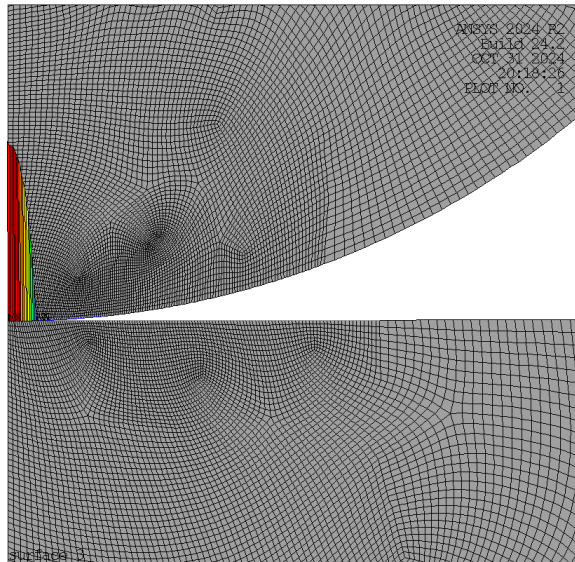


NODAL SOLUTION

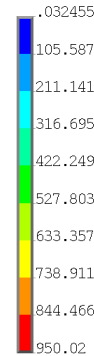


STEP=1  
 SUB =100  
 TIME=100  
 COMPRES (AVG)  
 DMX = .046369

Kontakt surface to surface 3

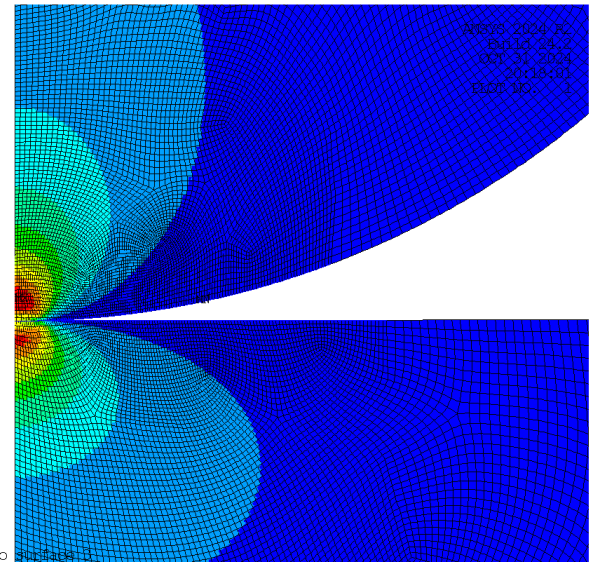


NODAL SOLUTION

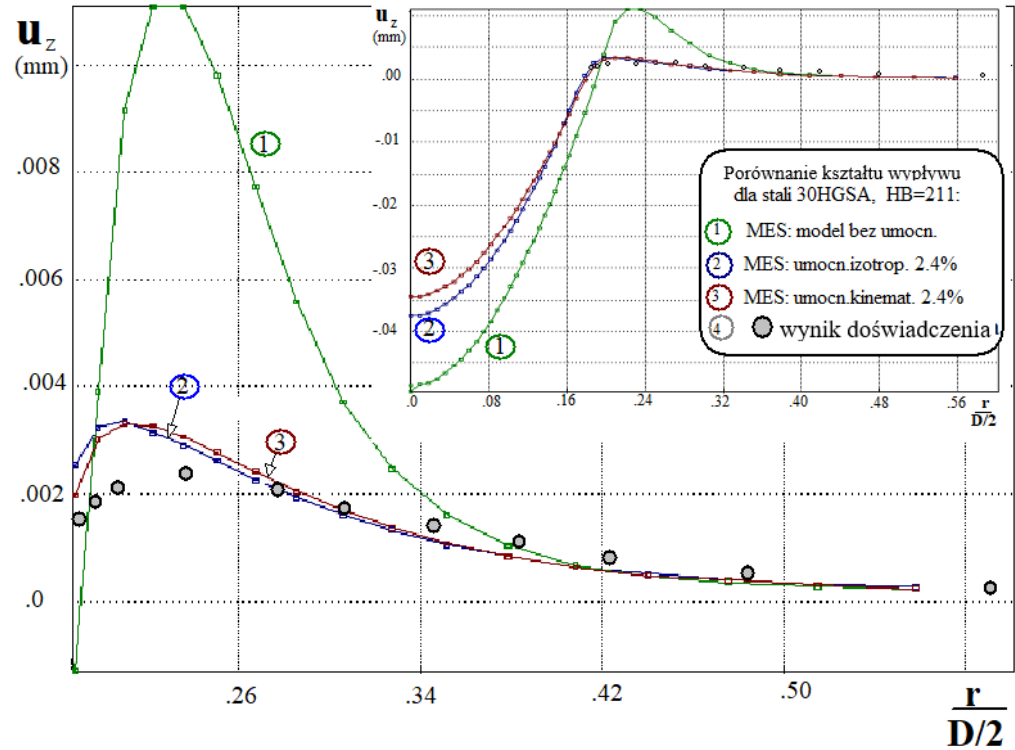
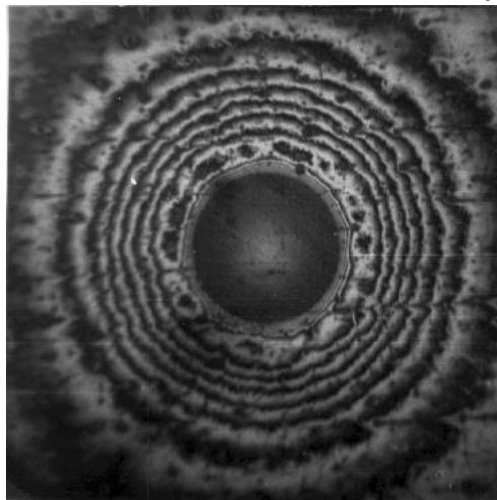
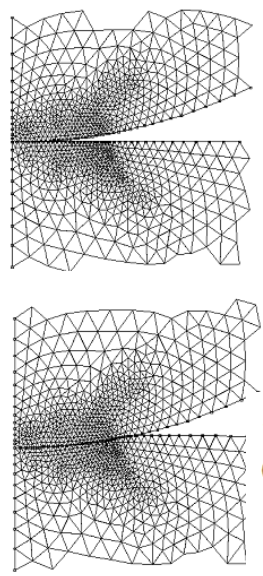
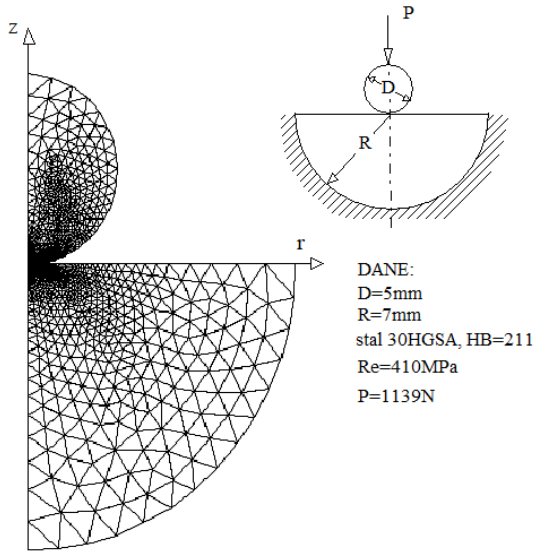


STEP=1  
 SUB =100  
 TIME=100  
 SEQV (AVG)  
 DMX = .046369

Kontakt surface to surface 3

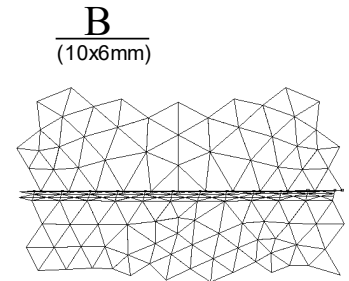
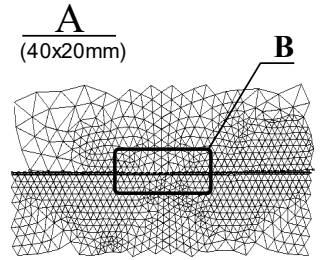
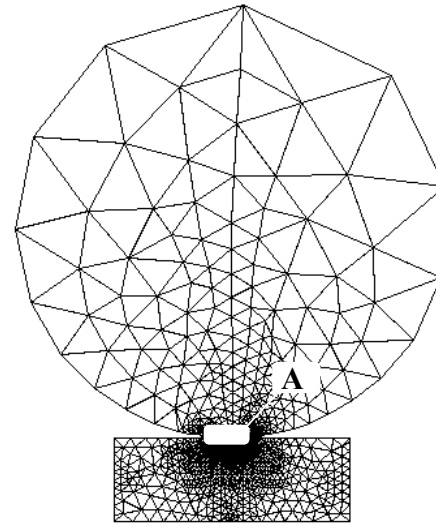
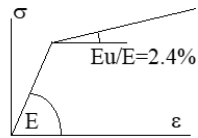
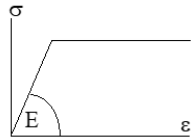
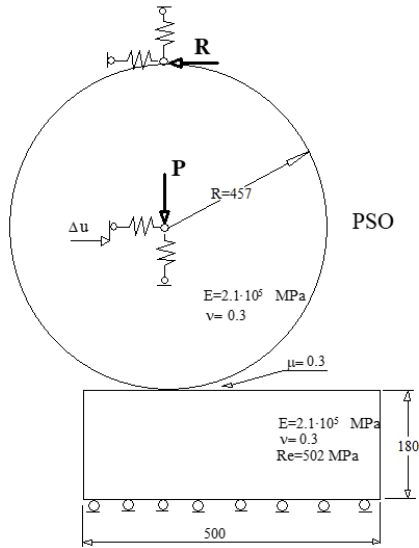


# Przykład 7 Kulka wciskana w półprzestrzeń sprężysto-plastyczną (program własny1993)

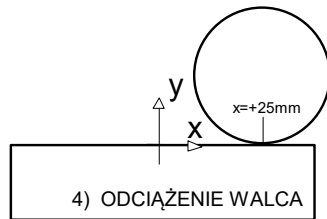
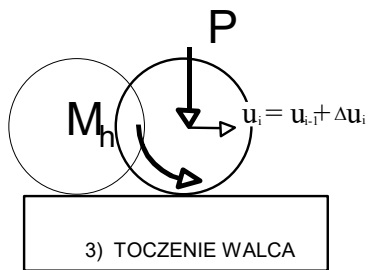
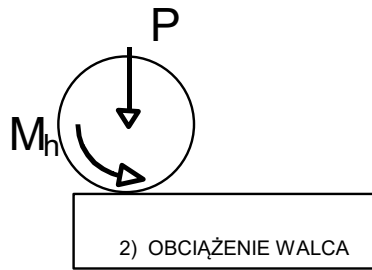
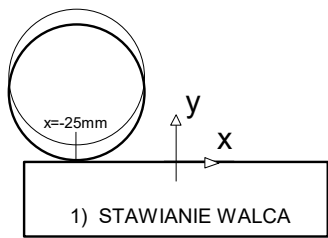


Uzyskany doświadczalnie obraz warstwicowy powierzchni wokół odcisku wykonanego w stali 30HGSA (HB=211)

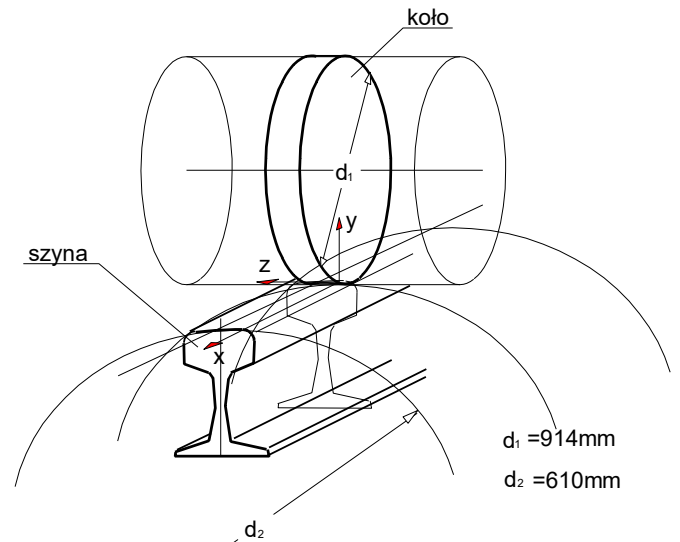
# Przykład 8 Model dwuwymiarowego kontaktu walca z półprzestrzenią



Siatka elementów skończonych przyjęta do analizy numerycznej

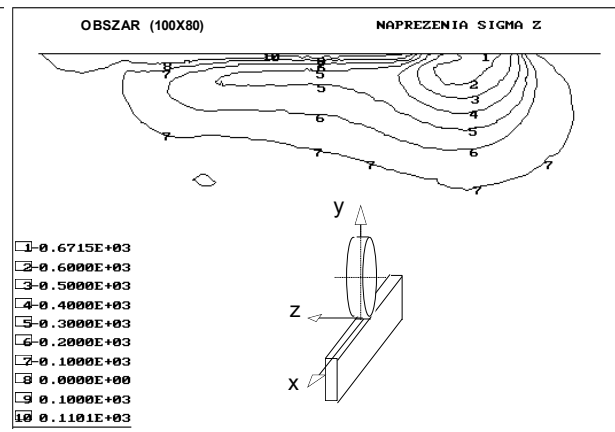
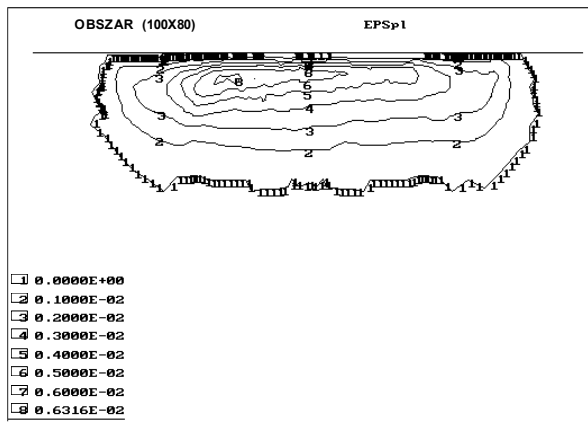


Schemat realizacji procesu toczenia

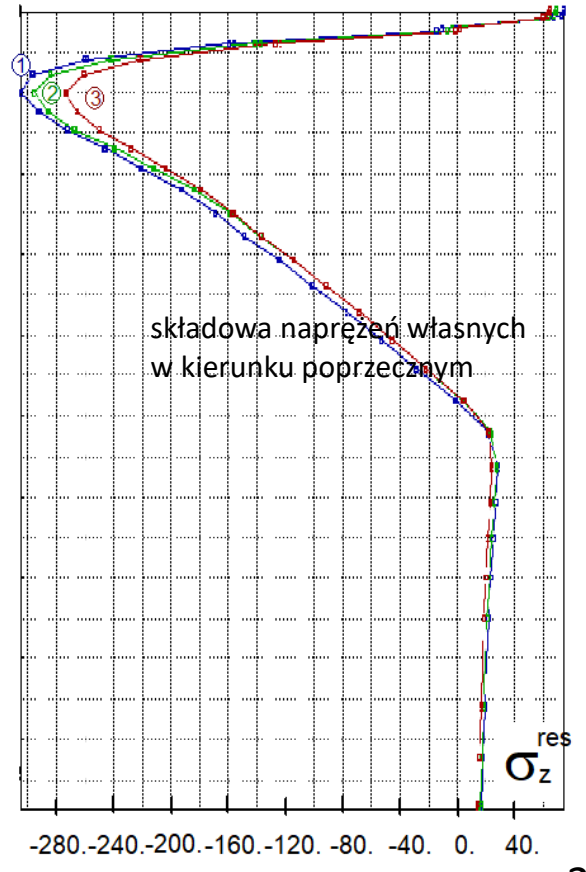
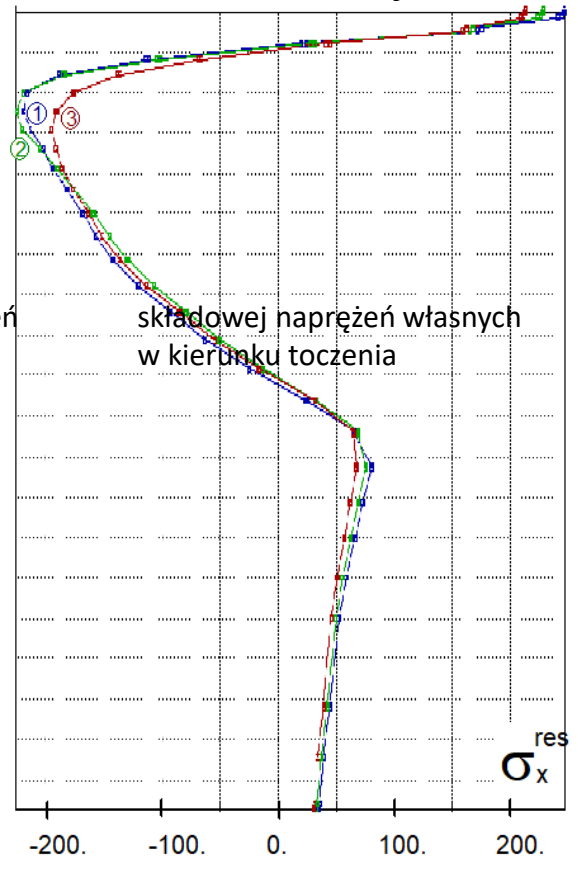
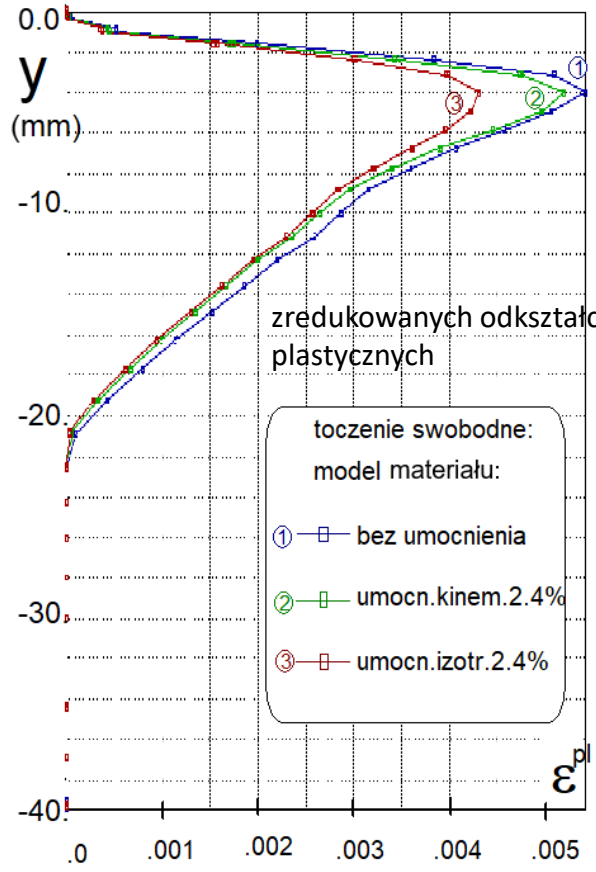


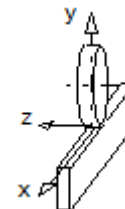
Kontakt koła z szyną jako kontakt dwóch cylindrów o osiach prostopadłych

Toczenie swobodne, stan w miejscu  $x=0$ ; rozkłady w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia ( $y$ ) dla różnych modeli umocnienia materiału

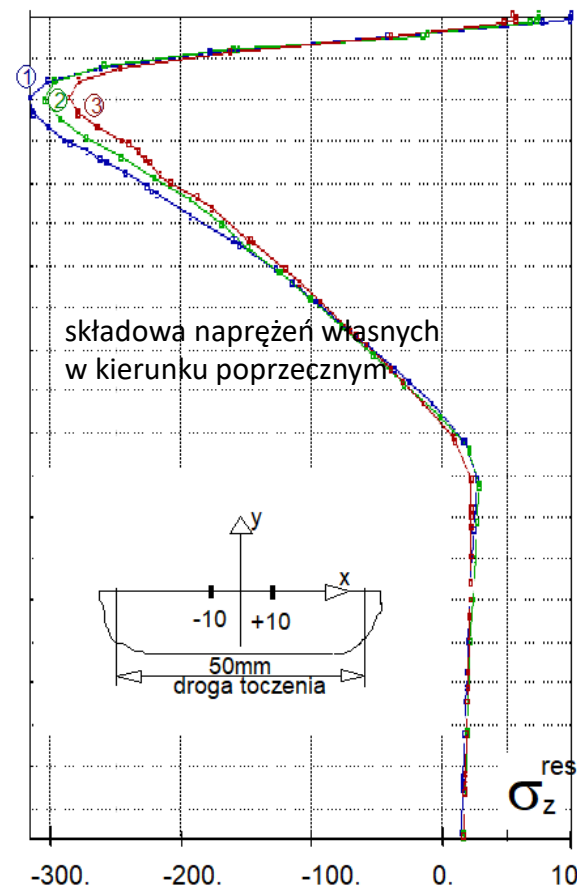
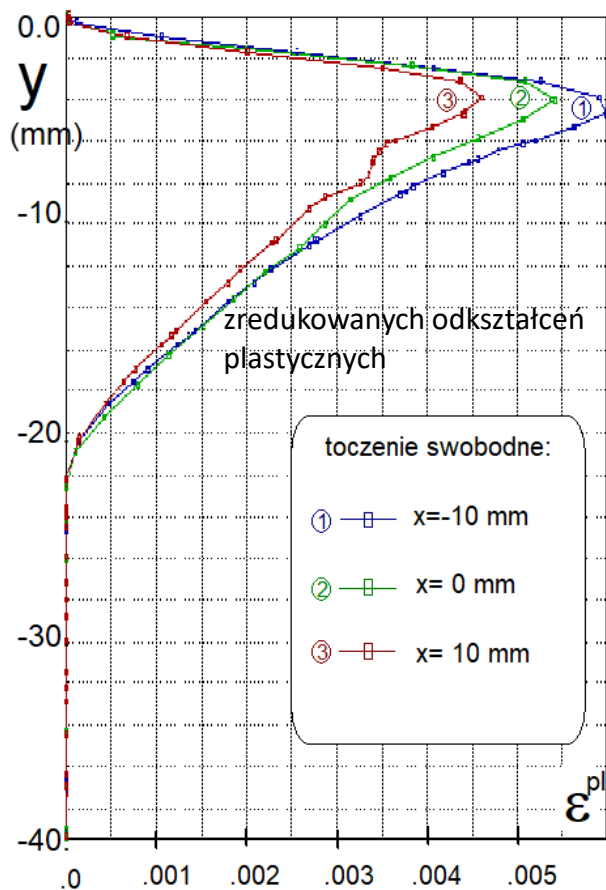


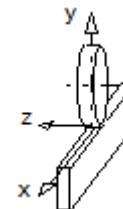
Toczenie swobodne, stan w miejscu  $x=0$



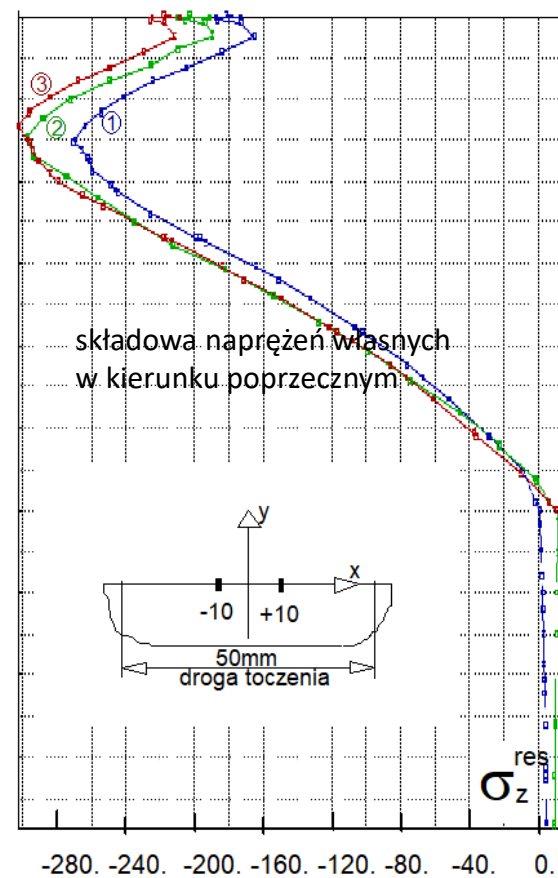
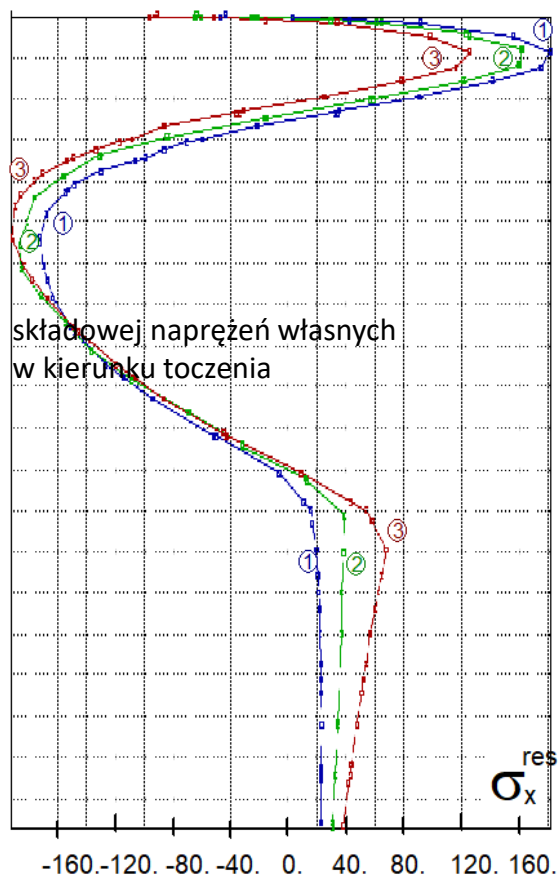
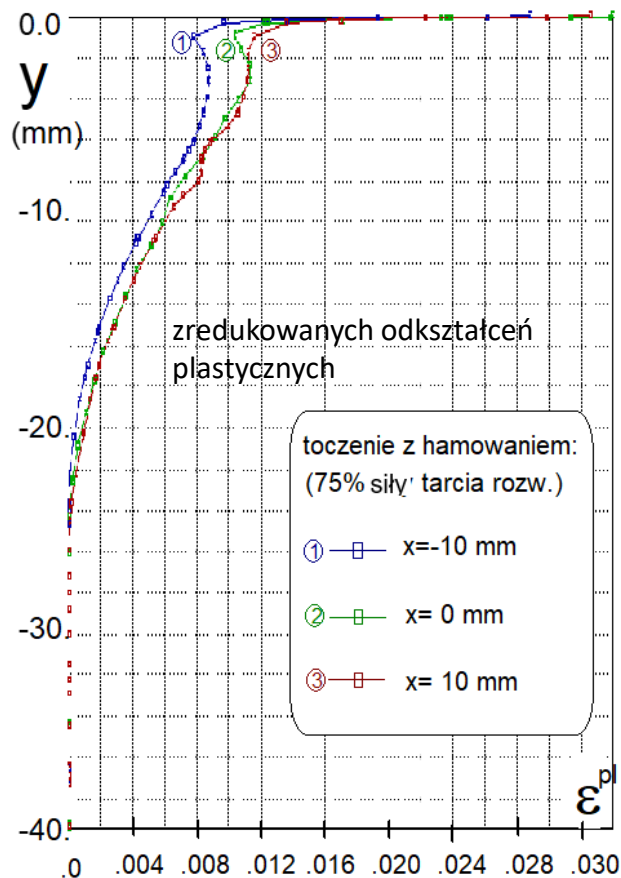


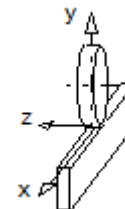
## Toczenie swobodne z tarciem



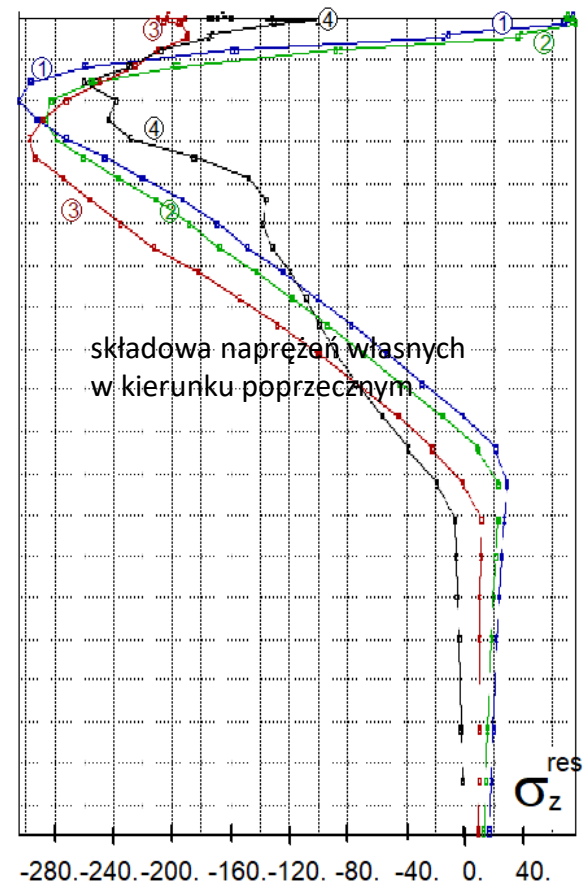
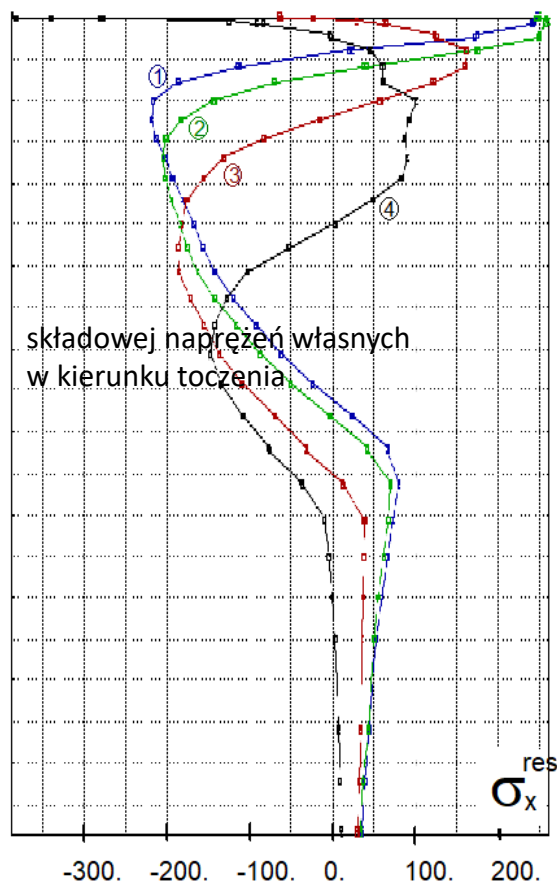
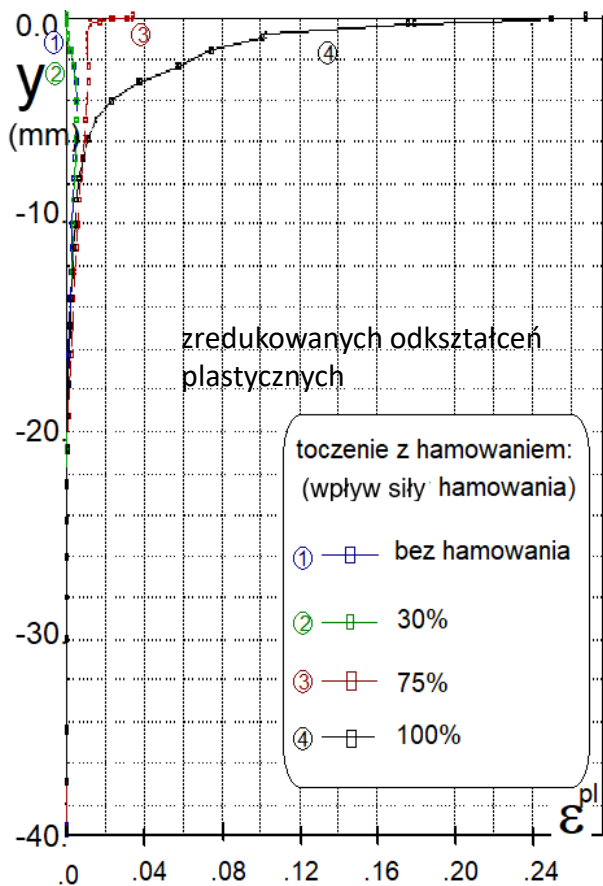


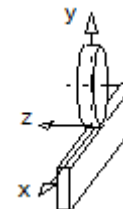
## Toczenie z hamowaniem (75%)



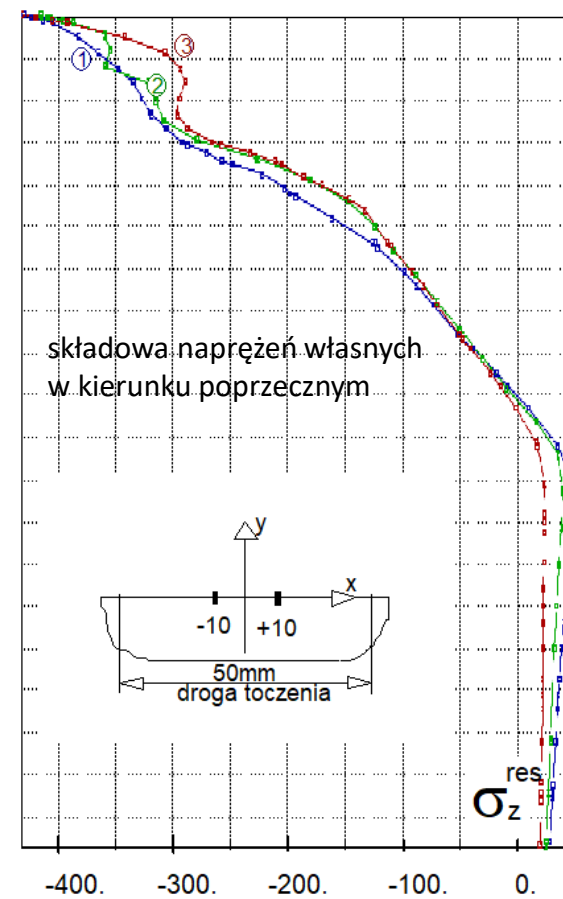
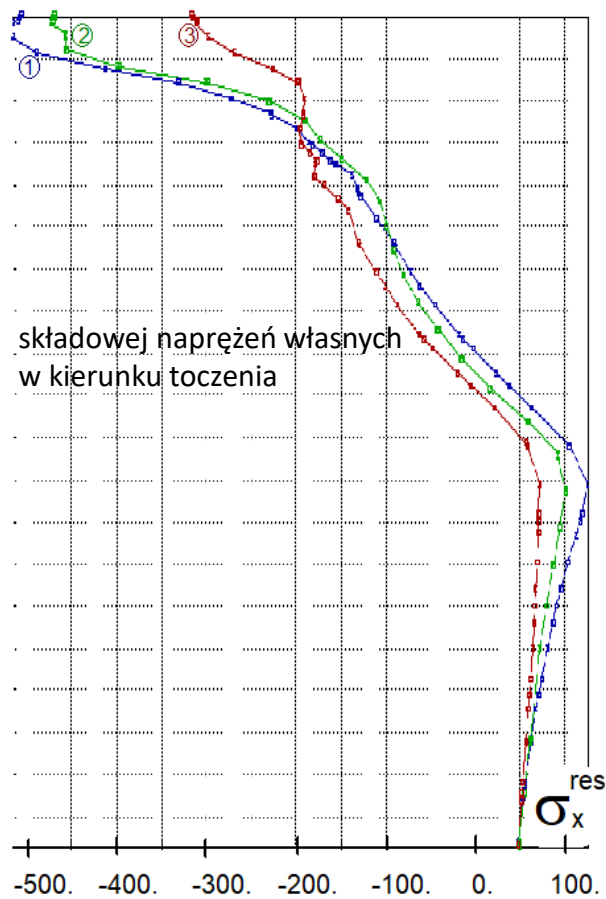
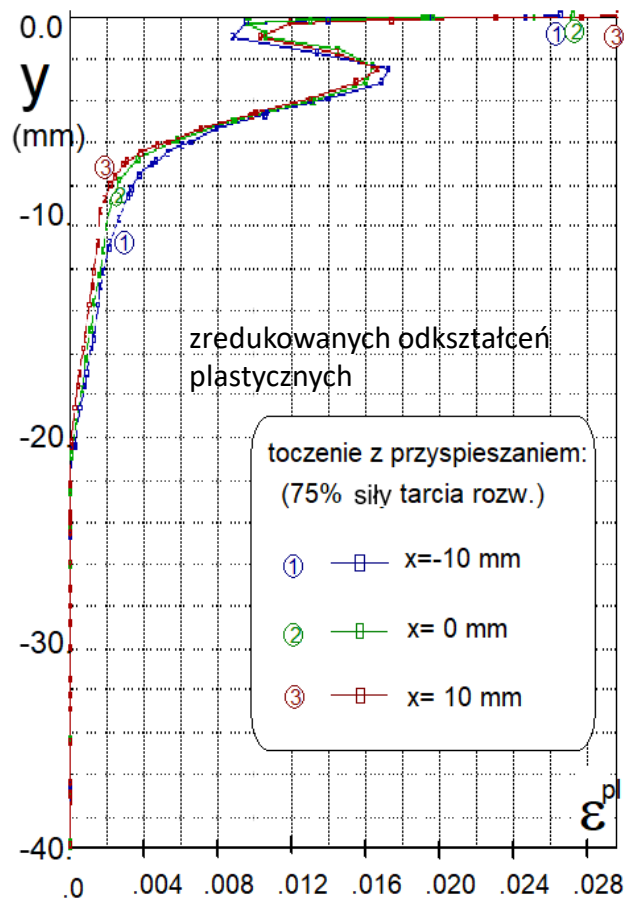


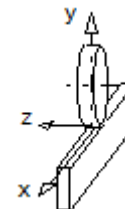
## Toczenie z hamowaniem, stan w miejscu $x=0$



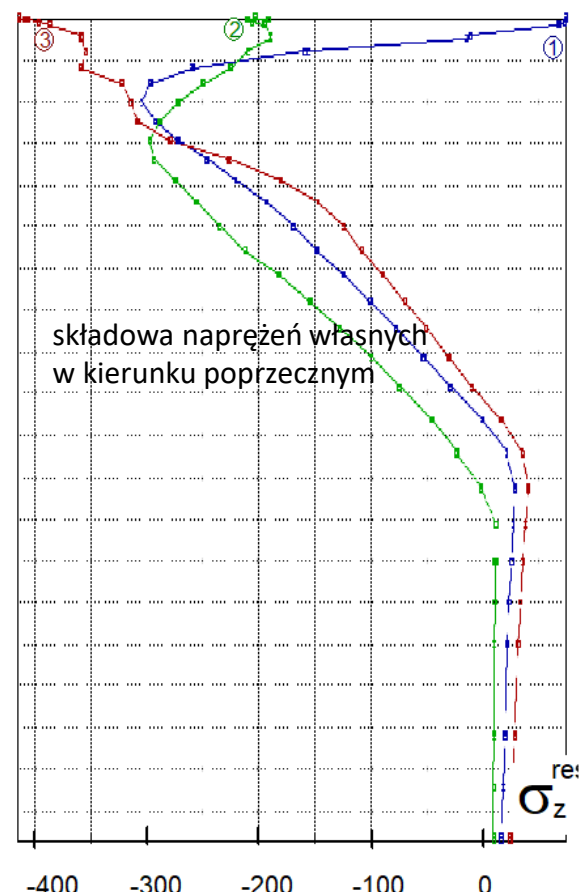
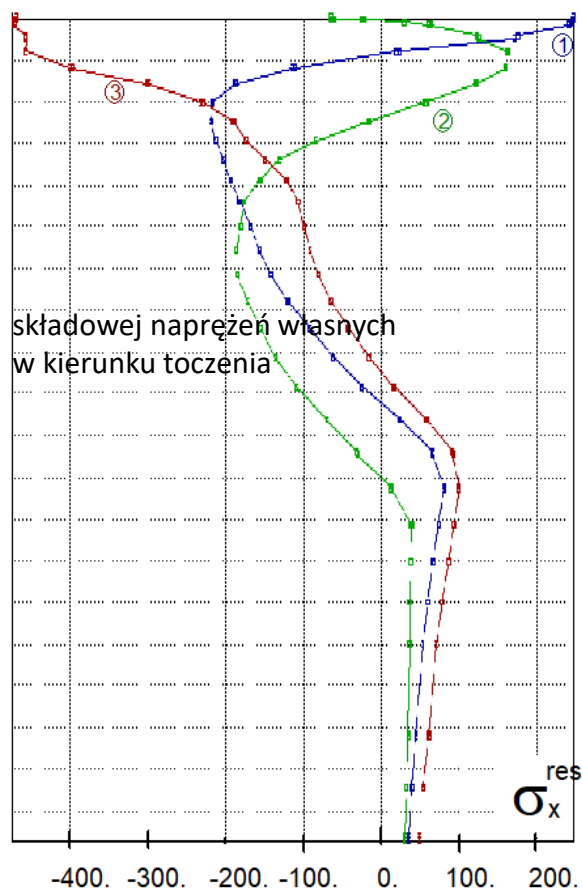
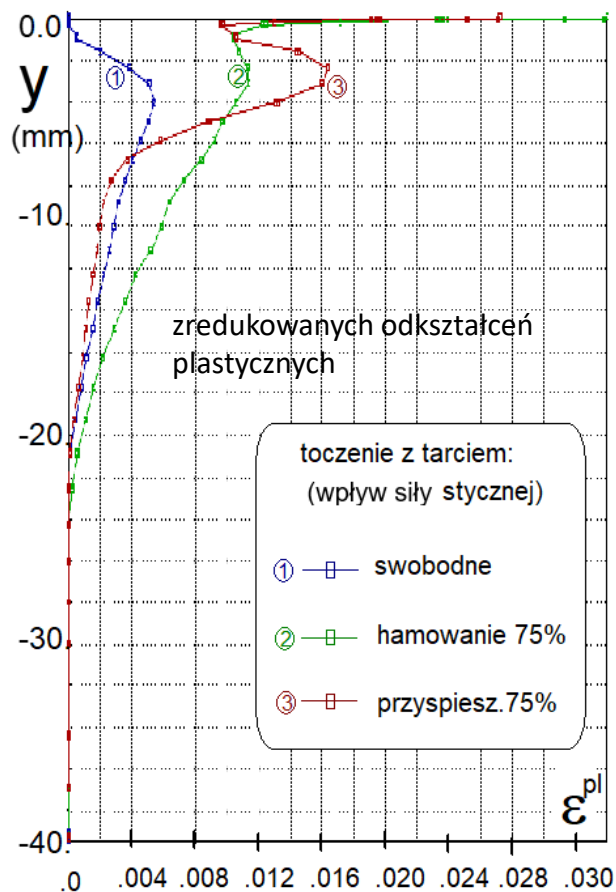


## Toczenie z przyspieszaniem 75%



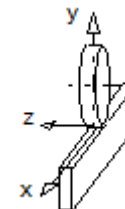


Porównanie toczenia swobodnego z hamowaniem (75%) i przyspieszaniem (75%) w miejscu  $x=0$



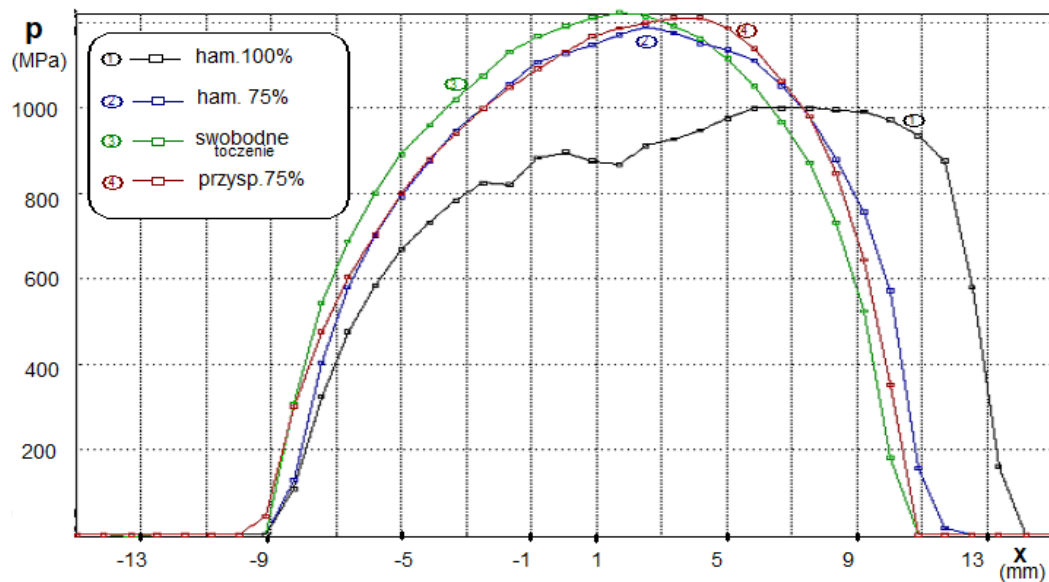
# Porównanie toczenia swobodnego, z hamowaniem i przyspieszaniem

NAPRĘŻENIA WŁASNE W STATYCZNYCH I QUASISTATYCZNYCH ZAGADNIENIACH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO KONTAKTU



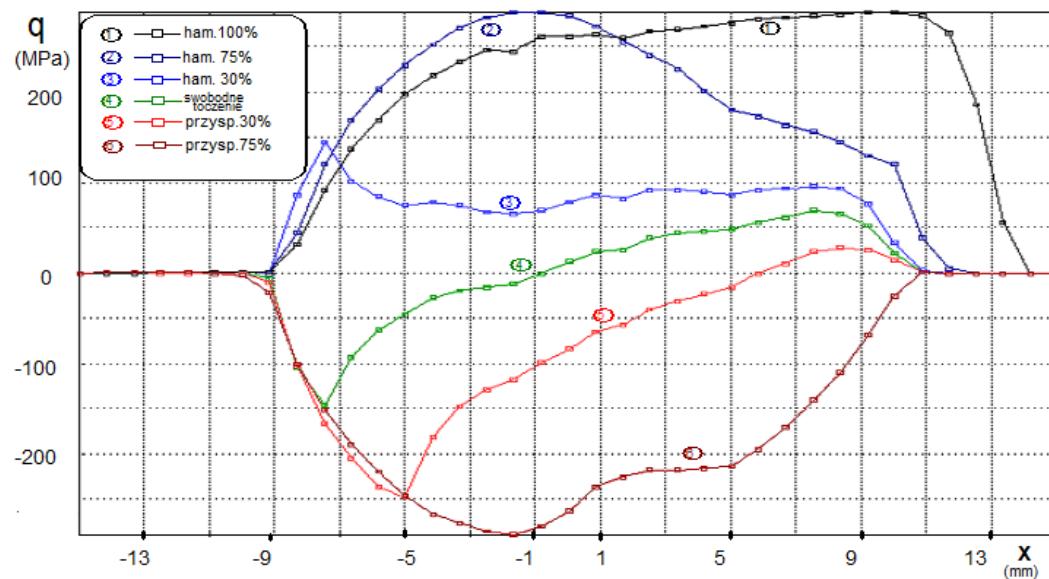
rozkłady nacisków

a)

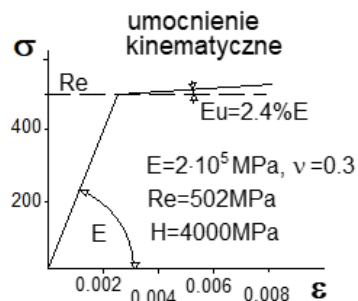
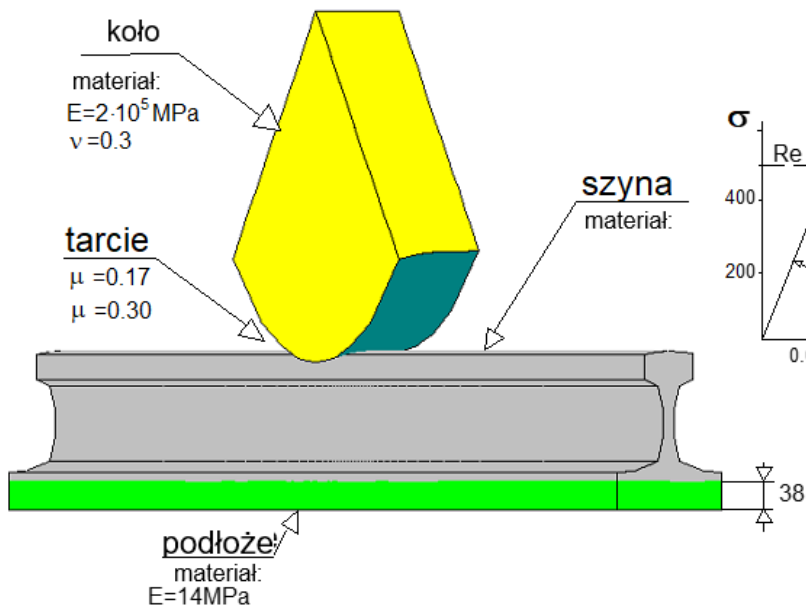
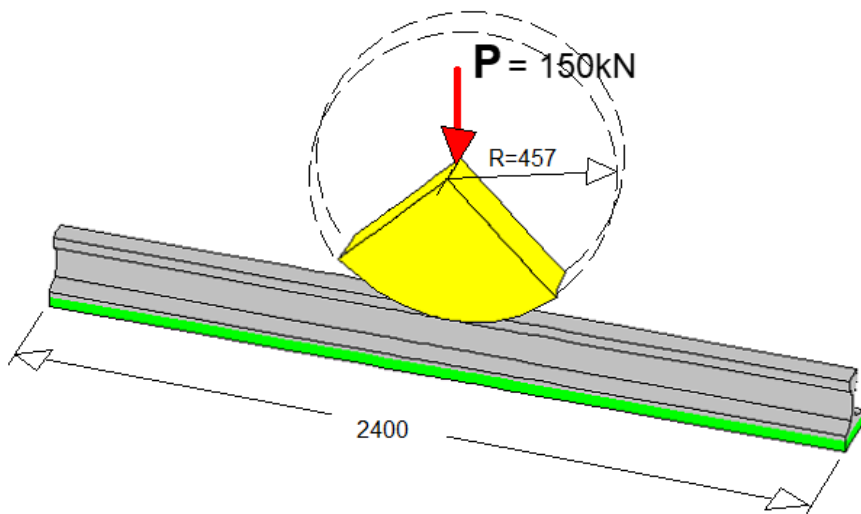


Rozkłady naprężeń stycznych

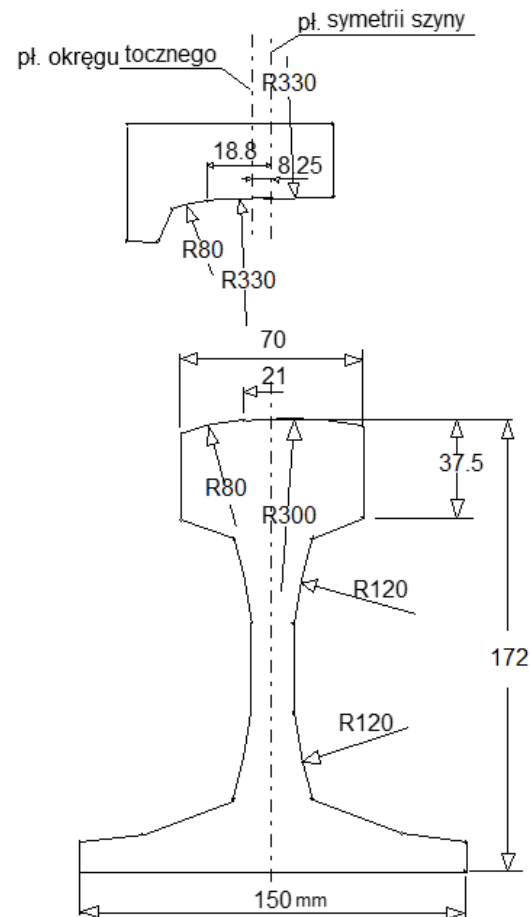
b)



# Przykład 9 Model trójwymiarowego kontaktu koła z szyną kolejową (1995)



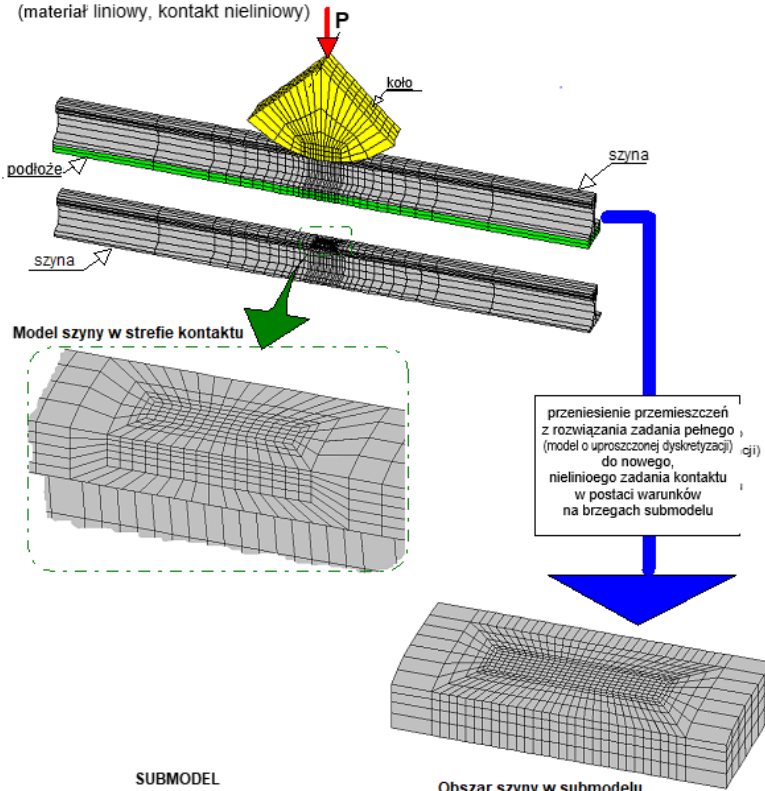
Geometria przekroju poprzecznego koła



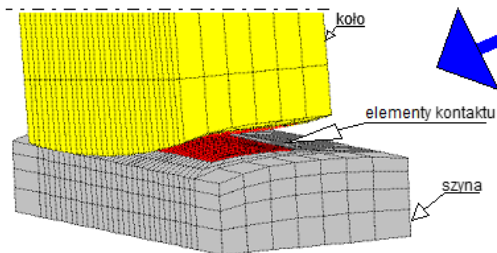
Geometria przekroju poprzecznego szyny

Rys.6.6. Geometria ciał i model materiału przyjęte w analizie kontaktu tocznego szyny z kołem.

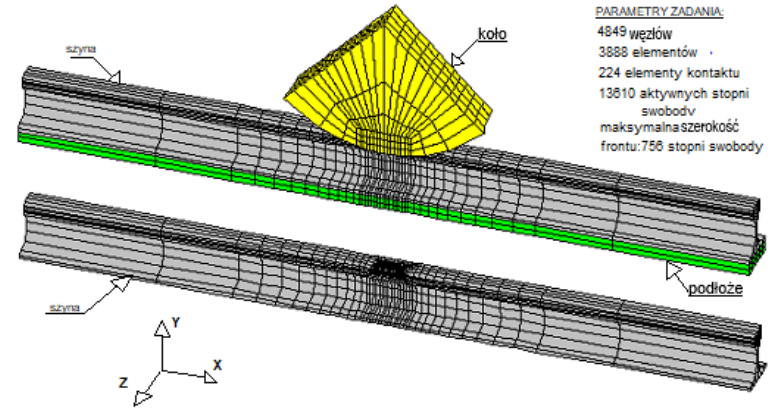
**Pełny model kontaktu szyny z kołem**  
(materiał liniowy, kontakt nieliniowy)



**SUBMODEL KONTAKTU SZYNY Z KOŁEM**  
(materiał szyny nieliniowy, kontakt nieliniowy z tarciem, obciążenie siłami i krokiem przemieszczenia)

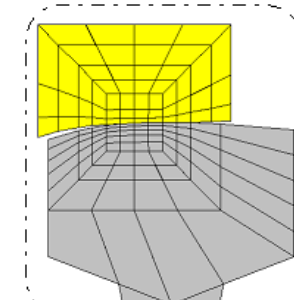
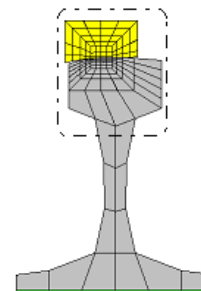
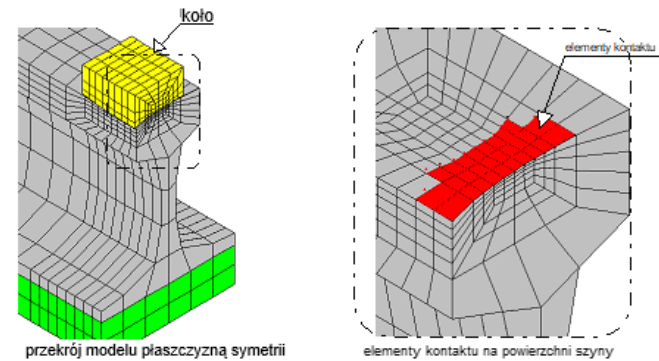


Rys. 6.7. Koncepcja submodelingu w zadaniu kontaktu tocznego szyny z kołem.

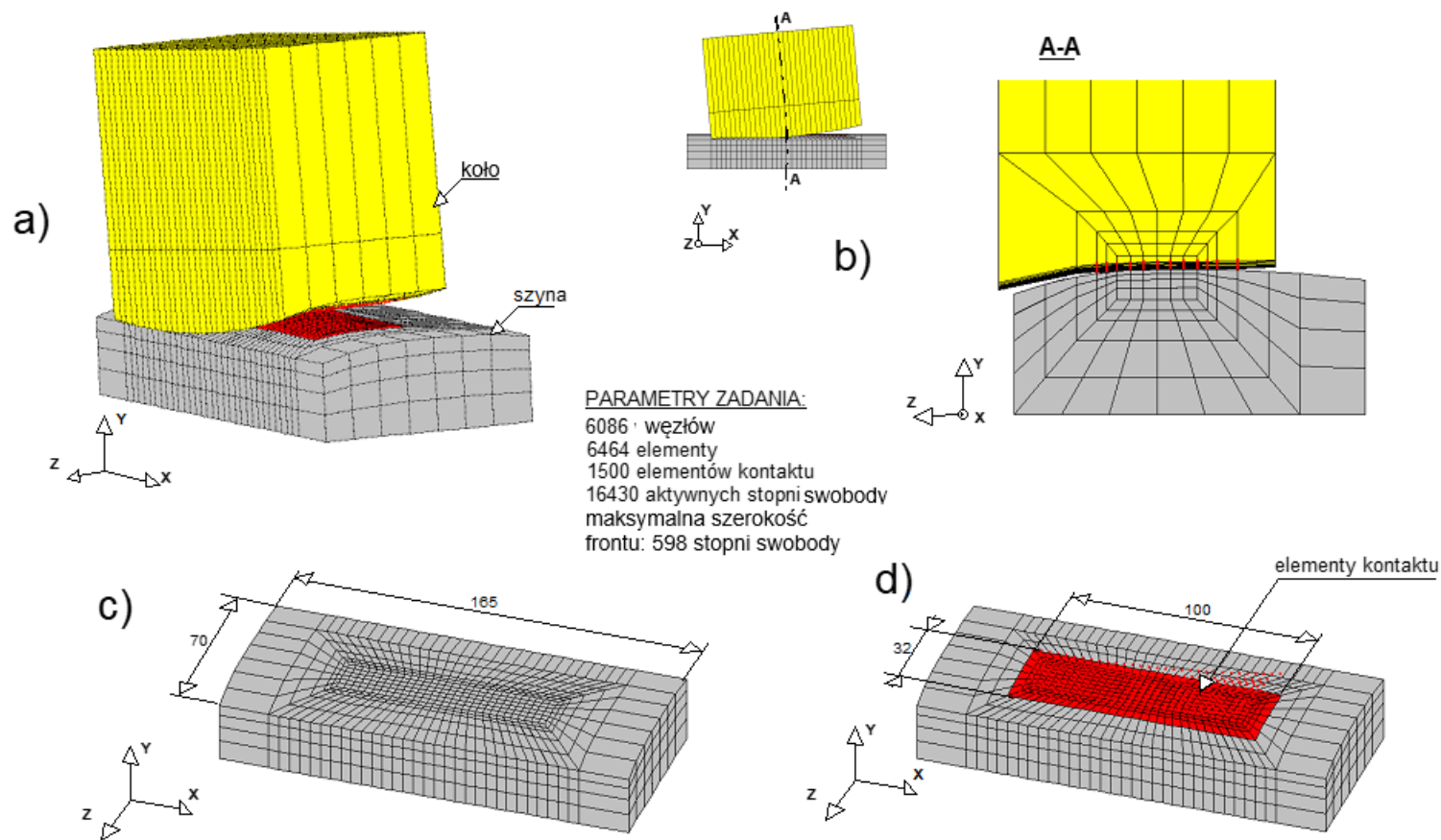


**PARAMETRY ZADANIA:**  
4849 węzłów  
3888 elementów  
224 elementy kontaktu  
13810 aktywnych stopni swobody  
maksymalna szerokość frontu: 756 stopni swobody

**Budowa strefy kontaktu**

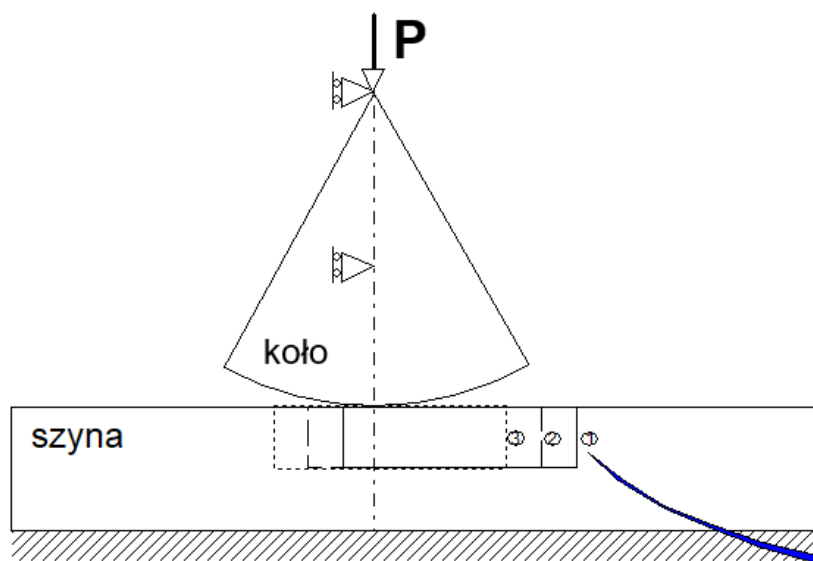


Rys.6.8. Siatka dyskretyzacyjna dla zadania pełnego kontaktu szyny z kołem.

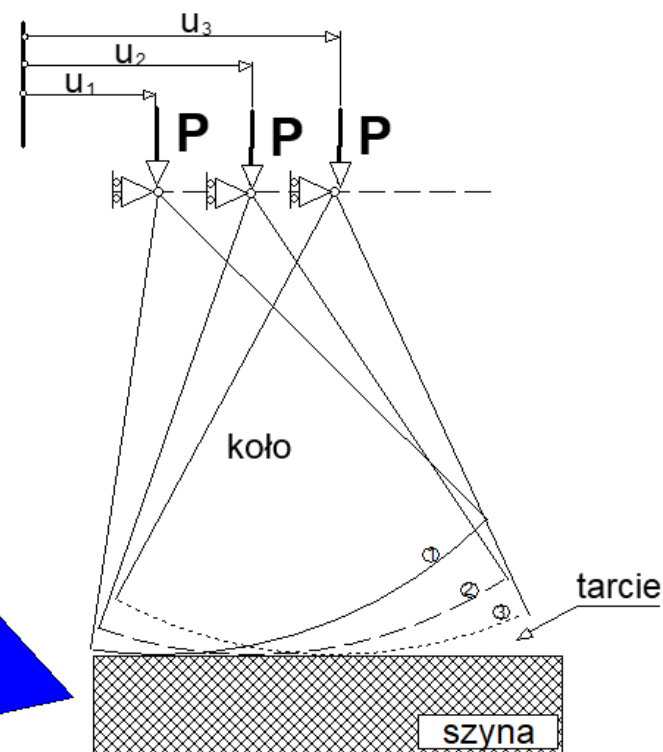


Rys.6.9. Dyskretyzacja submodelu w zadaniu kontaktu szyny z kołem;  
a) wycinek szyny objęty submodelem,  
b) przekrój submodelu płaszczyzną A-A,  
c) dyskretyzacja submodelu,  
d) dyskretyzacja strefy kontaktu z zaznaczeniem elementów kontaktu.

## MODEL

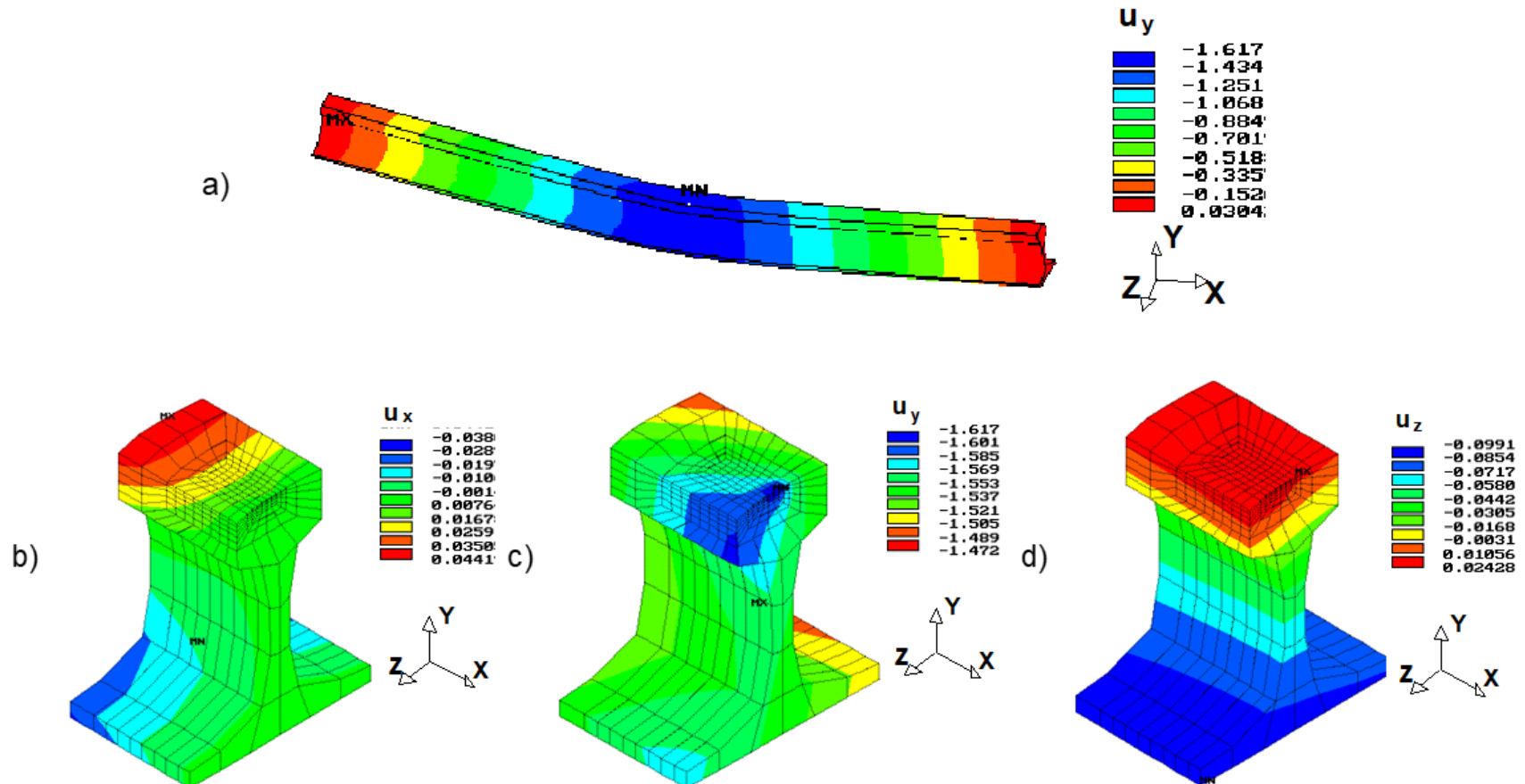


## SUBMODEL

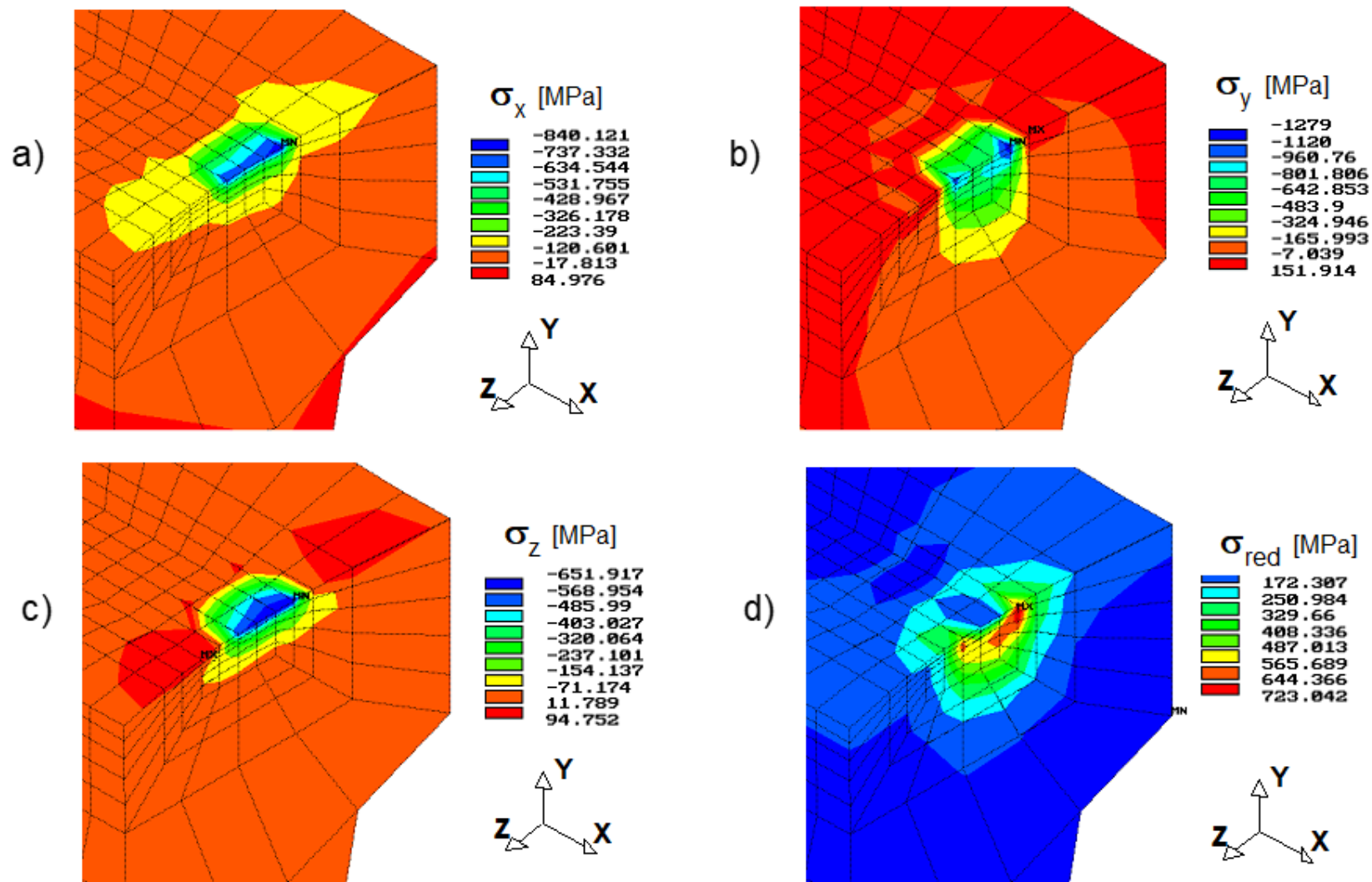


przeniesienie warunków  
brzegowych w kolejnych  
krokach obciążenia

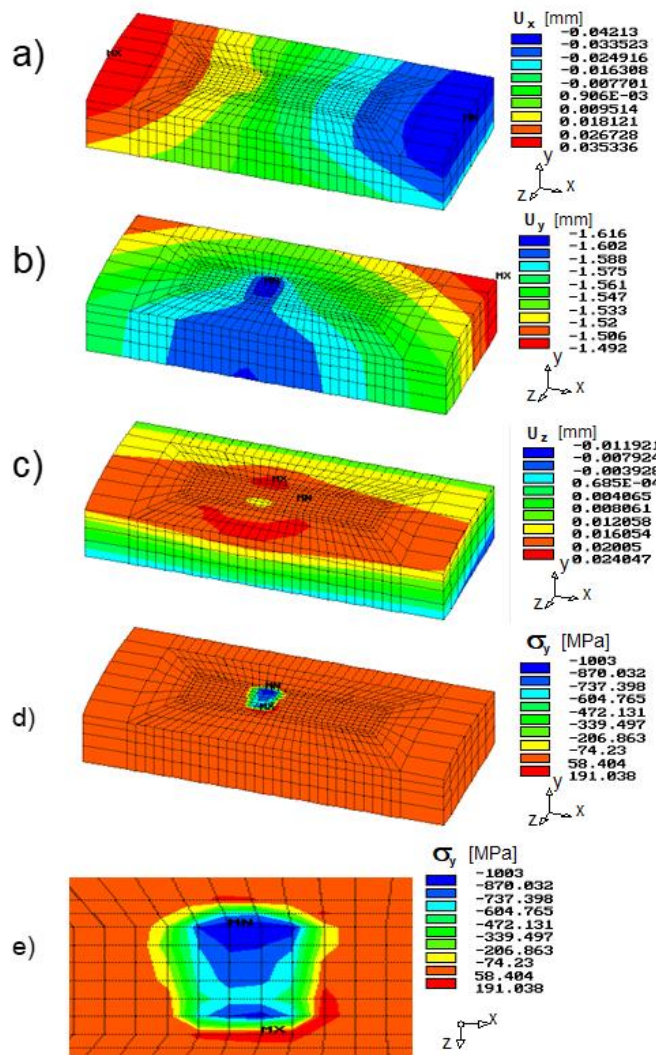
Rys.6.10. Koncepcja toczenia w zadaniu kontaktu szyny z kołem, przy wykorzystaniu modelu i submodelu.



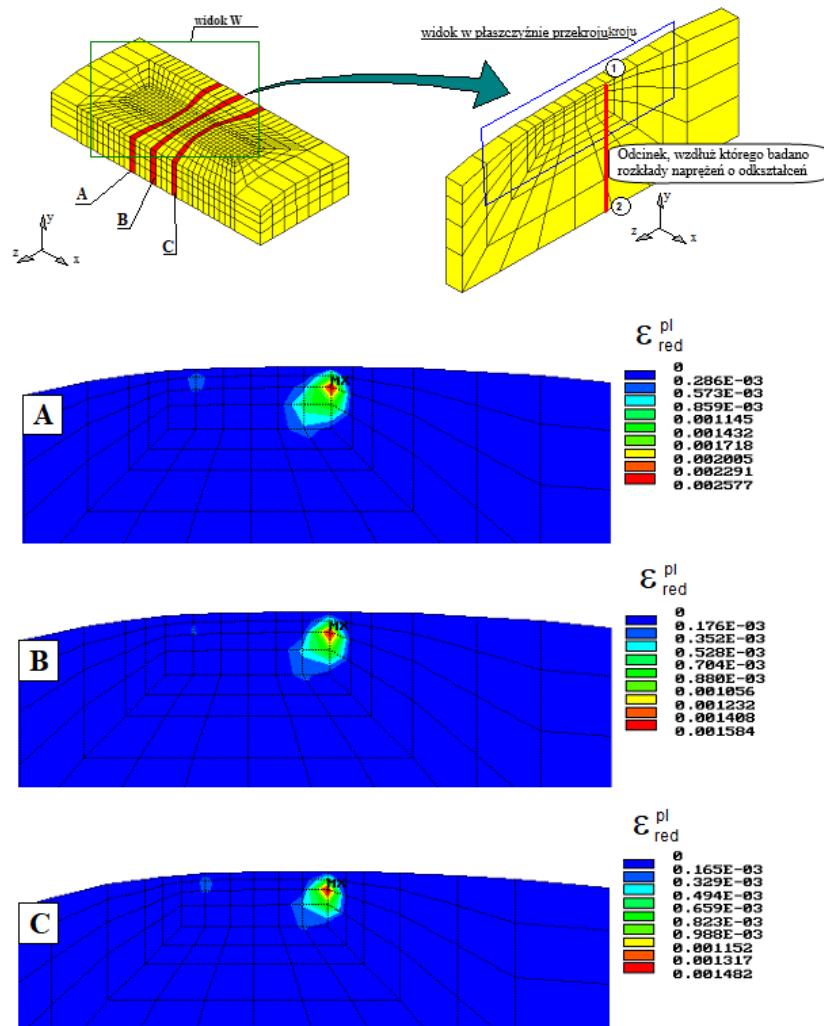
Rys.6.11. Wyniki obliczeń modelu pełnego: przebiegi składowych przemieszczenia [mm]: a) w kierunku pionowym dla całej szyny, oraz b) w kierunku wzdłużnym, c) pionowym i d) poprzecznym w strefie kontaktu.



Rys.6.12 Rozkłady składowych naprężeń normalnych: a) w kierunku wzdłużnym, b) w kierunku pionowym, c) w kierunku poprzecznym oraz c) naprężeń zredukowanych w strefie kontaktu dla modelu pełnego szyny.



Rys. 6.13. Swobodne toczenie, stan po przemieszczeniu koła o 30mm; rozkłady składowych przemieszczenia: a)  $U_x$ , b)  $U_y$ , c)  $U_z$  oraz rozkład nacisków na powierzchni toczenia submodelu d) obraz całości, e) powiększenie elementu powierzchni



Rys.6.16. Rozkłady zredukowanych odkształceń plastycznych w kolejnych przekrojach poprzecznych (A,B,C) po toczeniu swobodnym i odciążeniu.